
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 00184309 3

Grundlehren

der

reinen

Mathematik

von

Johann Heinrich Voigt

Professor der Mathematik in Jena und Correspondent der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Nebst 2 gedruckten und 8 Kupfertafeln.

Jena,

in der akademischen Buchhandlung

1791.

Vorrede.

Meine Absicht ist bey dem Entwurf dieser Schrift gewesen, den Freunden der Mathematik ein Lehrbuch in die Hände zu geben, über welches sie nicht allein mit Nutzen Vorlesungen hören, sondern mittelst dessen sie sich auch bey einigen Vorkenntnissen und hinlänglicher Aufmerksamkeit durch Selbststudium zum Lesen solcher Lehrbegriffe vorbereiten könnten, die wegen ihres tieferen Ganges und weitern Umfassungskreises mehr Anstrengung und Beharrlichkeit erfordern, als sich gewöhnlich von Personen, die mit den Gegenständen einer Wissenschaft und deren Behandlungsart noch nicht vertraut sind, erwarten läßt.

Ich habe zu dem Ende manches weiter auseinander gesetzt und anschaulicher vorgetragen, als es sonst in einem Lehrbuche das blos zu Vorlesungen bestimmt ist, nöthig wäre. Um aber auch nicht zu weitläuftig zu werden, habe ich oftmals blos durch ein zweckmäßig ge-

wähltes Beyspiel dasjenige vollends aufzuhellen gesucht, was mir im Vortrag der Sache selbst noch etwas schwierig schien. Diese Methode soll, wie ich hoffe, auch den Vortheil gewähren, daß nun in den Vorlesungen die ganze Zeit blos auf weitere Ausführungen, Zusätze und mannichfaltige Anwendungen des vorgetragenen verwandt werden kann. Für diejenigen die sich nicht unter den Umständen befinden, über dieses Buch Vorlesungen zu hören, habe ich da, wo ich glaubte nicht weiter gehen zu dürfen, auf die Schriften des Hrn. Hofr. Kästner, denen ich selbst meine Kenntnisse in diesem Fache vorzüglich verdanke, verwiesen, weil diese allgemein als ächt klaßisch anerkannt sind, und ihr aufmerksames und anhaltendes Studium den jungen Mathematiker in den Stand setzen kann, alle Theile der niedern und höhern Mathematik fast aus diesen Schriften ganz allein, oder doch mit Zuziehung noch einiger anderer deren in denselben Erwähnung geschieht, auf das gründlichste kennen zu lernen. Sie sind wirklich in weit vorzüglicherm Grade für unsere Zeiten das, was die Wolfischen für die ihrigen waren. Indessen bin ich weit entfernt den großen Werth zu verkennen

den

den auch die Eulerschen, Seegnerschen, Karstenschen, Clemmschen, Lambertschen, Klügelschen, Schulzischen u. a. Werke haben, so daß ich sie vielmehr ebenfalls auf das sorgfältigste allen empfehle, welche die Mathematik als ihr Hauptfach treiben wollen.

Daß ich übrigens bey meinem Vorsatze die Materien so faßlich und plan als möglich abzuhandeln, doch gleich im Anfang der Arithmetik §. 60 und 134 die Begriffe vom mathematischen Unendlichen mit berührt, und an andern Orten Rechnungen mit eingeschaltet habe, die man zu den algebraischen zu zählen pflegt, wird mir nicht zur Last gelegt werden können, wenn man einmal bedenkt, daß hier der Ort war, wo sie sich gleichsam von selbst darboten, und dann es doch großen Vortheil gewährt, wenn beym weitern Studium der Mathematik, von Dingen die für schwer gehalten werden, eine vorläufige Idee in der Seele schwebt.

Eben so wenig darf ich einen Vorwurf befürchten, daß ich zu Anfang der Geometrie etwas von Elementen der Linien gesagt habe, das man sonst, wenigstens hier, nicht erwartet. Ich bin nemlich fest überzeugt, daß man ohne

diese

diese Begriffe den Unterschied zwischen geraden und krummen Linien schlechterdings nicht deutlich einsehen könne, und doch ist dieses ganz unentbehrlich, wenn der Beweis zum 11ten Euklidischen Grundsatz, wie ich ihn beym §. 98. gebe, ganz befriedigend erscheinen soll. Diesem Beweis habe ich hier, um ihn etwas einleuchtender zu machen, als es vielleicht in meiner kleinen, besonders davon herausgegebenen, Schrift geschehen war, eine solche Anordnung gegeben, daß man wenigstens gleich sehen kann, wo er befriedigt, oder nicht befriedigt. Worauf meines Erachtens alles bey ihm ankommt, ist das, was in den letzten Zeilen des §. 97. und zu Ende der Seite 241. enthalten ist. Die Bedenklichkeit, daß bey meinen Elementen der Satz von der Stetigkeit und geometrischen Theilung bis ins Unendliche, angefochten werde, muß sogleich verschwinden, wenn man das was ich §. 6. Geom. von ihnen sage, immer vor Augen behält, daß nemlich einem solchen Element keine bestimmte Größe beygelegt wird, sondern daß man es so klein annehmen kann als man will. Eben so verschwindet auch die Bedenklichkeit welche in einer Recension die sich in der Oberdeutsch. A. L. Z. 150 St. 1790

von

von jener kleinen Schrift befindet, über den Umstand, daß ich das Element der Linie weder als gerade noch als krumm, sondern als dieser Eigenschaften ganz unfähig ansehe, in folgenden Worten geäussert wird. „Die Elemente der geraden Linie sind doch keine Punkte; denn sie haben Ausdehnung in die Länge. Soll nun diese Ausdehnung nicht auch als gerade gedacht werden? Und wenn die Elemente einer krummen Linie nicht krumm seyn sollen, könnte man dann nicht sagen, daß die krumme Linie aus Theilen bestehe, die von einer ganz andern Gattung sind„. Um hier der Vorstellung zu Hülfe zu kommen, empfehle ich ein Gleichniß von einer Reihe aneinander liegender Kugeln; diese Reihe kann eine gerade und eine krumme Linie bilden, und von den einzelnen Kugeln welche die Elemente derselben ausmachen, kann man doch nicht sagen, daß sie im ersteren Fall ebenfalls gerade, im andern aber, krumm wären, nur aus der bestimmten Zusammenordnung der Kugeln beurtheilt man die Geradheit oder Krümme der Reihe. Uebrigens wäre es auch eben nicht mathematisch heterodox wenn man behauptete, die krumme Linie bestehe aus Theilen die von einer ganz andern Gattung wären

— denn

— denn Wolf sagt ja schon von der krummen Linie, sie sey diejenige deren Theil der Ganzen nicht ähnlich wäre.

Ehe ich schließe will ich noch ein paar Zusätze beyfügen, die mir bey der Revision meines Buchs nöthig geschienen haben. 1) Zu §. 228. Ar. setze man: Um also die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen zwey gegebnen zu finden, multiplicire man die gegebnen äussern durcheinander und ziehe aus dem Producte die Quadratwurzel. 2) Zu §. 263. Ge. setze man: Und wenn af auf mn, und ac auf bd senkrecht ist, so muß auch fc auf bd senkrecht seyn, denn sonst würde eine Linie aus c, welche auf cd senkrecht stünde, in einen andern Punkt der Linie eg als in f, treffen, und eine Linie von a bis in diesen Punkt müßte nach (261) noch ein anderes Perpendikel als af, auf mn geben, welches aber dem zu Anfang dieses §. gesagten widerspricht.

Jena, im September 1791.

Einleitung.

Grundbegrif von Mathematik überhaupt und Uebersicht ihrer verschiedenen Theile.

§. 1.

Alle Gegenstände die sich unsrer Erkenntniß darbieten, lassen sich, einmal in Absicht ihrer Eigenschaften, und dann in Absicht ihrer Größe betrachten. In wiefern man nun irgend einen Gegenstand so behandelt, daß man sich blos mit dem was seine Größe betrift, oder eigentlich, was ausmeßbar an ihm ist, beschäftigt, in so fern behandelt man ihn **mathematisch**.

§. 2.

Der Hauptcharakter im Begrif von der Mathematik ist also die Größe. Eine Größe wird jeder Sache in so fern zugeschrieben, als sich eine **Vermehrung** oder **Verminderung** bey ihr gedenken läßt. Eine Vermehrung hat überhaupt statt, wenn zu einer Sache noch so Etwas kommt, woraus sie bereits besteht; eine Verminderung, wenn dergleichen von ihr weggenommen wird, z. B. in ein

Gefäß mit Wasser gießt man neues Wasser, so wird es vermehrt, oder man gießt welches heraus, so wird es vermindert.

§. 3.

Soll aber eine Größe so vermehrt oder vermindert werden, daß man sich dieselbe als etwas Meßbares vorstellen kann, so muß man sich eine Vielheit von irgend Etwas bey ihr gedenken; oder man muß Etwas in ihr mehr oder wenigermal so beysammen annehmen, daß es jedesmal ein gewisses Ganzes ausmacht.

§. 4.

Dieses Etwas nennt man die **Einheit** in jeder Größe. Durch Zusetzung solcher Einheiten wird die Größe so vermehrt, und durch Wegnehmung derselben so vermindert, daß man davon eine mathematische Kenntniß bekommt.

§. 5.

In jeder Größe wird also zwar Vielheit bemerkt, aber das Viele besteht immer nur in einem einzigen Dinge, das mehrmals vorhanden ist. Nennt man nun, wie gewöhnlich, die einzelnen Dinge die eine Größe ausmachen, ihre Theile, so wird man in dem einen Theile nichts weiter erkennen, als was man in jedem andern auch erkennt, und man sagt deshalb, die Theile einer Größe seyen gleichartig. Z. B. eine Bibliothek besteht aus vie-

len Büchern. Buch ist hier die Einheit, oder der einzelne Theil der Bibliothek, und in der ganzen Bibliothek wird im mathematischen Verstande kein Buch von dem andern unterschieden. Eben dieses hat bey einer Summe Geldes; einer Armee und dergleichen statt. Ausser solchen Rücksichten aber, kann eine Größe aus sehr ungleichartigen Theilen bestehen.

§. 6.

Es hat zwar an sich nichts widersprechendes, daß man sich die Einheit bey einer Größe aufs neue wieder als eine Zusammenhäufung anderer Einheiten von einem niedrigeren Grade vorstellt; allein endlich muß man doch einmal bey einer Einheit stehen bleiben, bey der man wenigstens nicht auf ihre weitere Eintheilung Rücksicht nimmt, und von der Größe einer solchen kann man nicht anders als durch sinnliches Gefühl oder anschauen einen Begrif erhalten; z. B. von der Größe eines Groschens, eines Fußes.

§. 7.

Sobald man aber neben einer solchen Einheit noch andere von höheren oder niederen Graden mit betrachtet, so läßt sich auch schon ohne Anschauuung, durch bloße Vergleichung eine Vorstellung von einer solchen Größe erhalten; so ist z. B. der Groschen der vier und zwanzigste Theil eines Thalers, oder eine Menge von zwölf Pfennigen.

§. 8.

Das Beysammenseyn mehrerer Theile in einer Größe kann auf **doppelte** Art gedacht werden. Einmal so, daß die einzelnen Theile für sich bestimmt sind, und ihre Gränzen wahrgenommen werden können; oder so, daß es frey bleibt diese Gränzen **allenthalben wo man will**, anzunehmen, und in der Größe selbst nichts vorhanden ist welches es nöthig machte das Ende des einen Theils hier, und den Anfang des folgenden dort anzunehmen.

§. 9.

Größen der ersteren Art nennt man **unterbrochene oder Zahlen** (quantitates discretas) und die der letzteren Art stetige (continuas). Ein Beyspiel der erstern kann wieder eine Bibliothek, eine Armee u. s. w. abgeben. Ein Beyspiel zur letztern aber ein Würfel, eine Kugel, überhaupt jede Körpermasse. Bey Größen dieser letztern Art sieht man nicht blos auf die Menge der Theile, woraus sie bestehen, sondern auch noch mit auf ihre Gestalt, oder die Lage und Verbindung der Theile.

§. 10.

Die Größe einer Sache durch Vergleichung mit einer andern Größe bestimmen, heißt **messen**, und jene andere Größe wird in so fern ein **Maasstab** genannt. Bey jeder Messung wird also die Menge gewisser bekannter Einheiten angegeben,

die

die in der gemessenen Größe enthalten sind. Derjenige Theil der Mathematik, wo man sich mit Messungen unterbrochener Größen, und dem was damit in Verbindung stehet, beschäftigt, heißt die **Rechenkunst** oder **Arithmetik**; derjenige aber, wo die **stetigen** der Hauptgegenstand der Untersuchungen ist, wird die **Erdmeßkunst** oder **Geometrie** genannt.

§. 11.

Unter den stetigen Größen ist die Betrachtung der **Dreyecke** von sehr ausgebreitetem Nutzen, indem man sich eine große Menge bekannter und gesuchter Größen als Theile eines Dreyecks vorstellen kann. Man hat deshalb verschiedene Lehren der Rechenkunst mit denen, welche die Beschaffenheit der Dreyecke in der Geometrie betreffen, verbunden, um aus bekannten Theilen eines Dreyeckes unbekannte zu berechnen, und die Wissenschaft wo dieses gezeigt wird, die **Trigonometrie** genannt. Sie theilt sich in die **ebne** und **sphärische**, je nachdem sich die zu betrachtenden Dreyecke auf einer **Ebne**, oder auf der **Fläche einer Kugel** befinden.

§. 12.

Um sich die Größen und ihre Theile zu versinnlichen, bedient man sich gewisser Zeichen. Diese bestehen in Ziffern und **Buchstaben**. Die letztern werden besonders gebraucht, wenn nicht so wohl

von Vergleichung der Einheit mit der ganzen Größe, als vielmehr von der Vergleichung mehrerer Größen gegen einander selbst, die Rede ist. Z. B. wenn jemand sich zwey Größen in die Gedanken genommen hat, und giebt erstlich an, wie viel sie zusammengenommen betragen, und dann auch wie groß ihr Unterschied ist, so läßt sich durch eine solche Rechnung mit Buchstaben herausbringen, wie viel die in Gedanken gehabten Größen selbst betragen. Diese Art von Rechenkunst nennt man im Gegensatz mit der, wo blos Ziffern gebraucht werden, die höhere, und unterscheidet in ihr die Algebra, Analysis, Differenzial- und Integralrechnung, wovon sich aber itzt noch kein hinlänglicher Begrif geben läßt; selbst dann ist dies kaum möglich, wenn man so weit vorbereitet ist, daß man sich an sie wagen kann.

§. 13.

So lange man von den stetigen Größen nur solche betrachtet, welche durch Lineal und Zirkel dargestellt werden können, steht man noch in der niedern, oder Elementargeometrie; geht man aber auf andere krumme Linien, Flächen und Körper über, so betritt man das Gebiet der höhern Geometrie; bey welcher denn auch die Lehren der höhern Arithmetik eben so, wie die der gemeinen bey der Elementargeometrie, gebraucht werden. Ueberhaupt pflegt man alles dasjenige,

höhere

höhere Mathematik zu nennen, wo höhere Arithmetik in Anwendung kommt.

§. 14.

So lange man bey den Größen an nichts weiter denket, als an das, was ihnen als Größen eigen ist, so sagt man, daß man sie rein, oder von allen übrigen, etwa an sich habenden Eigenschaften abgesondert, betrachte; und alles was hieher gehöret, wird unter dem Namen der reinen Mathematik begriffen. Z. B. ich denke bey einem Dreyeck an nichts, als an die 3 Seiten und 3 Winkel, die sein Wesen und seine allgemeinen Eigenschaften ausmachen.

§. 15.

Sobald man aber ausser dem was die Größe angeht, auch noch andere Eigenschaften der Gegenstände mit in Betracht zieht, so hat man die angewandte Mathematik. Z. B. ich stelle mir bey einem Dreyeck ausser seinen Seiten und Winkeln überhaupt, auch noch besonders die eine Seite als eine Ebne vor, auf welche eine Tonne hinauf gewälzt werden soll; die andere als das Stück der Erdfläche über welches jene Last hinweg, und die dritte als die Höhe, auf welche sie hinauf gehoben werden soll: so gehört nun diese Betrachtung des Dreyecks nicht mehr in die reine, sondern in die angewandte Mathematik.

§. 16.

Die angewandte Mathematik kann sich sonach auf alles erstrecken, was meßbar ist. Man hat indessen gewisse Abschnitte für sie festgesetzt, in welchen dasjenige beysammen ist, was man zur Zeit in ihr erfunden hat. Das erste und allgemeinste was hieher gehört, betrift die **Kräfte der Körper** und die Wissenschaft derselben im allgemeinen, heißt die **Dynamik**. Betrachtet man dieselben in so fern sie sich entweder das Gleichgewicht halten, oder sich in Bewegung setzen, so kann man wieder darauf sehen, ob es feste; oder **tropfbar flüßige**; oder **elastisch flüßige** sind; im ersten Fall heißen die dahin gehörigen Zweige der angewandten Mathematik; **Statik** und **Mechanik**, im zweiten, **Hydrostatik** und **Hydraulik** und im dritten **Aerostatik** und **Aerometrie**.

§. 17.

Ausser den Kräften ist das **Licht** eine sehr allgemeine Erscheinung in der Natur, woran man sehr viel meßbares erkannt hat. Man sieht die scheinbaren Ausflüsse desselben als gerade Linien an, die unter mancherley Winkeln zusammen geordnet sind. Sie heißen hier **Stralen** und werden entweder in ihrer geraden Richtung, oder im Zustande eines Rückpralls, oder einer gewissen Ablenkung von der geraden Richtung, wo sie wie gebrochen erscheinen, betrachtet. Im ersten Fall ge-

ben

ben sie der Optik, im zweiten der Catoptrik und im dritten der Dioptrik, den Ursprung. Betrachtet man die Stellen die sie auf einer gewissen Ebene bezeichnen, indem sie von Gegenständen durch diese Ebne nach dem Auge zu gehen, oder auch einen sogenannten Schatten begrenzen, so entsteht daraus die Perspectiv, die aber auch zuweilen mit zur reinen Mathematik gerechnet zu werden pflegt.

§. 18.

Die Betrachtung des Lichts führt leicht auf die Betrachtung der himmlischen Körper, von welchen es gröstentheils herkommt. Die Untersuchung ihrer Größe, Entfernungen und Gesetze der Bewegung, machen einen großen Abschnitt in der angewandten Mathematik aus, welcher den Namen der mathematischen Sternkunde oder Astronomie führt. Vor Zeiten erstreckte sich diese Wissenschaft auch noch auf Berechnug der Einflüsse welche die himmlischen Körper, besonders in diesem und jenem Stande, auf Fruchtbarkeit, ja selbst auf Schicksale der Erde und der Menschen haben sollten; und man begreift diesen Theil unter dem Namen der Sterndeutekunst oder Astrologie. Seitdem man aber die Wissenschaften mit ächtphilosophischem Geiste zu studiren anfing, bemerkte man, daß die Astrologie nicht auf sichere Naturgesetze gebaut und die Mathematik blos bey ihr gemisbraucht worden sey; und so ist sie bald

in Verachtung, und nun seit langer Zeit in gänzliche Vergessenheit gekommen.

§. 19.

Die Astronomie macht es mehr als wahrscheinlich, daß auch die Erde die wir bewohnen, mit zu einer gewissen Klasse der himmlischen Körper gehöre. Man wendet deshalb manche Lehren der Astronomie und der reinen Mathematik auf die Bestimmung der Gestalt und Größe dieser Erde und auf verschiedene, die Arten ihrer Bewegung betreffende Eintheilungen und Abmessungen an. Den Inbegriff dieser Lehren nennt man die mathematische **Erdbeschreibung** oder **Geographie.**

§. 20.

Die himmlischen Körper geben durch ihre Erscheinungen und Bewegungen ein bequemes Mittel ab, die Zeit nach grössern und kleinern Abschnitten einzutheilen; dies hat der mathematischen Zeitrechnug oder **Chronologie**, den Ursprung gegeben.

§. 21.

Zur Abmessung so kleiner Zeiträume, wie Stunden sind, dienen die Schatten, welche die himmlischen Körper, besonders die Sonne, hinter einem aufgerichteten undurchsichtigen Stift oder Gnomon machen. Mit Anwendung der Mathematik lassen sich nemlich ihre Stellen für

gewisse

gewisse Zeitpunkte und auf gewissen Flächen im voraus bestimmen. Die hieher gehörige Wissenschaft führt deshalb den Namen Sonnenuhrenkunst oder Gnomonik.

§. 22.

Seit Erfindung des Schießpulvers hat man die Mathematik auch mit großem Vortheil auf die Einrichtung und den Gebrauch des Geschützes und die Befestigung der Oerter angewandt. Die hierdurch entstandenen Wissenschaften haben den Namen der Geschützkunst, oder Artillerie und der Kriegsbaukunst, oder Fortifikation erhalten. Bey ihnen ist nicht alles so ganz mathematisch wie bey den vorigen, sondern es gehören noch eine Menge anderer Kenntnisse aus der Chemie, Naturgeschichte und Technologie dazu.

§. 23.

Aehnliche Bewandniß hat es mit Anwendung der mathematischen Lehren auf die Anordnung und Errichtung der zum bewohnen und andern bürgerlichen Gebrauch dienlichen Gebäude; woraus die bürgerliche Baukunst oder Civil-Architecktur entstanden ist, und wozu man noch die Wasserbaukunst oder Hydrotechnik setzen kann, welche sich mit Anlegung solcher Werke beschäftigt, wodurch das Wasser in seinen gehörigen Schranken gehalten wird, über dieses aber auch mancherley Anwendungen solcher Lehren enthält,

welche

welche in der oben schon genannten Hydraulik vorkommen.

§. 24.

Aber nicht blos diese zuletzt genannten drey Wissenschaften erfordern neben den Mathematischen, noch andere Hülfskenntnisse, sondern es ist dies gewissermaßen auch der Fall bey allen vorhergehenden. Ohne die Natur und Eigenschaften derjenigen Dinge zu kennen, deren Größe man sich zu bestimmen vornimmt, wird diese blos mathematische Behandlung ein ziemlich trockenes und unvollständiges Studium seyn. Es ist also allen Freunden der Mathematik sehr zu rathen, nicht so gleich von der reinen zur angewandten überzugehen, sondern sich vorher die nöthigsten Kenntnisse aus der Naturlehre oder Physik zu erwerben. Ein gründliches Studium der Naturlehre erfordert zwar ebenfalls viel Mathematik, aber eines theils sind mit Beywürkung eines geschickten Lehrers, die erlangten Kenntnisse aus der reinen Mathematik schon ziemlich zulänglich; und anderntheils bleibt es Jedem unbenommen die Naturlehre noch einmal vorzunehmen, nachdem er sich mit der angewandten Mathematik hinlänglich bekannt gemacht hat.

§. 25.

Es giebt ausser den genannten, noch manche Anwendungen der reinen Mathematik, die aber noch

noch nicht zu solchen ganzen Lehrgebäuden angewachsen oder nicht von so ausgebreitetem Gebrauch sind, daß man sie in den Lehrbüchern der angewandten Mathematik mit aufgenommen hätte. Dahin gehört z. B. das Mathemathische vom Gehör oder von der **Musik**, und von Ausmessung der Stärke des **Lichts** und des **Feuers**, ob man gleich schon einzelne Abhandlungen und Namen, z. B. **Akustik**, **Photometrie** und **Pyrobolik**, für diese Anwendungen hat. Andere z. B. von **Elektricität** und **Magnetismus**, sind nur noch blos in physikalischen Werken zerstreut. Von Anwendungen der Rechenkunst auf Bestimmung der wahrscheinlichen **Lebensdauer** der Menschen und andere politische und juristische Gegenstände, hat man eigene Werke; allein für die Ausmessung der sogenannten **intensiven Größen**, **Vergnügen**, **Schmerz**, **Verstand**, **Herzensgüte**, und dergleichen, fehlt es uns noch ganz am Vorschriften, und zwar blos deswegen weil man noch keinen **Maaßstab**, oder eine **Einheit** bey diesen Größen festzusetzen oder allgemein verständlich zu machen im Stande gewesen ist.

§. 26.

Das **Buchhalten**, **Feldmessen** und die **Markscheidekunst** sind ebenfalls Anwendungen der reinen Mathematik. Man führt sie aber nicht mit unter den Theilen der angewandten Mathematik auf, sondern das Buchhalten wird in eigenen

Wer-

Werken abgehandelt und die Feldmeßkunst oder Geodäsie wird der Abwechselung und angenehmen Unterhaltung wegen der Geometrie mit einverleibt, und die Markscheidekunst bisweilen derselben angehängt. Eine andere zur ausübenden Geometrie gehörige Wissenschaft ist das Wasserwägen oder Nivelliren, wo man finden lernt um wie viel ein Ort weiter vom Mittelpunkt der Erde liegt als der andere; dies hat vornehmlich bey Anlegung der Wassermühlen seinen Nutzen und wird deshalb in der Mechanik, wo von diesem Gegenstand die Rede ist, mit eingeschaltet.

Von der Mathematischen Lehrart oder Methode.

§. 27.

Die Mathematik hat ihren Namen weder von der Größe noch von dem Messen, sondern von dem Wort μανθάνω, ich lerne, erkenne, auch ich lehre. Die Ursache hiervon ist, weil man im alten Griechenlande die Mathematik als die einzige Wissenschaft ansah, welche als Muster eines gründlichen oder eigentlich wissenschaftlichen Unterrichts aufgestellt werden könnte. Diese Gründlichkeit kommt aber nicht von ihrem Gegenstande, der Größe, sondern lediglich von der Methode, wie diese behandelt wird, her.

§. 28.

§. 28.

Diese Methode besteht nun darin, daß von allen zu dieser Wissenschaft gehörigen Sachen erstlich vollständige Begriffe oder genaue Bestimmugen (definitiones) festgesetzt werden, ehe man weiter von ihnen handelt. Man unterscheidet sie in Wort- und Sacherklärungen. Die erstern kommen vor, wenn man solche Merkmale von einer Sache angiebt wodurch sie sich von allen andern unterscheiden läßt. Z. B. der Kreis ist eine in sich selbst zurücklaufende krumme Linie, in welcher alle Punkte von einem gemeinschaftlichen Mittelpunkte gleich weit entfernt sind. Sacherklärungen aber giebt man, wenn man zeigt wie die Sache entsteht. Z. B. Ein Kreis entsteht, wenn sich eine gerade Linie in einer Ebne um einen von ihren Endpunkten, der unbeweglich bleibt, so lange nach einerley Richtung dreht, bis sie wieder in die Stelle gekommen ist, von welcher sie ausgieng.

§. 29.

Aus solchen Erklärungen leitet man ganz einfache Sätze her, deren Wahrheit gänzlich in der Richtigkeit der Erklärung und der Regelmäßigkeit ihrer Ableitung beruht. Man theilt sie in theoretische und praktische, je nachdem sie entweder sagen daß etwas sey, oder daß etwas geschehen könne. Im erstern Fall führen sie den Namen **Grundsätze**, (Axiomata) z. B. alle Halbmesser eines

eines Kreises sind einander gleich. Im letztern Falle werden sie Heischesätze (Postulata) genannt, z. B. über jeder geraden Linie läßt sich aus einem angenommenen Punkt ein Halbkreis beschreiben.

§. 30.

Aus mehrern solchen an sich einleuchtenden Sätzen entspringen andere, deren Wahrheit nicht sogleich aus vorhergegangenen Erklärungen eingesehen werden kann, sondern die man durch mehrere aneinander gekettete Vernunftschlüsse erst zeigen muß. Sie heißen **Lehrsätze** (Theoremata), wenn sie blos eine Wahrheit lehren, und man fügt ihnen allemal die Kette von Schlüssen bey, die zur Erkenntniß ihrer Wahrheit erforderlich sind. Bey jedem solchen Satze liegt immer eine gewisse Bedingung zum Grunde; und deshalb unterscheidet man besonders die **Voraussetzung**, den **Satz** selbst und seinen **Beweis**.

§. 31.

Sind hingegen dergleichen Sätze praktisch, so nennt man sie Aufgaben (Problemata). Bey jeder unterscheidet man ebenfalls den **Satz**, welcher sagt was geschehen soll; die **Auflösung** welche zeigt wie es geschieht und den **Beweis**, worinn dargethan wird, daß man gewiß das Verlangte erhält, wenn man die Auflösung genau befolgt.

§. 32.

Es kommt häufig vor, daß man von allen Arten der vorbeschriebenen Sätze leichte Folgerungen machen kann, für welche kein eigner Beweis, oder wenn sie etwa praktisch sind, eine besondere Auflösung nöthig ist. Man pflegt sie deshalb den Hauptsätzen blos anzuhängen und mit den Namen der Zusätze (Corollaria) zu belegen.

§. 33.

Diese Sätze werden nun sämmtlich so angeordnet, daß nicht blos die Materien, die ihren Inhalt ausmachen, mit einander verwandt und einander entsprechend sind, sondern daß auch niemals einer vorkommen darf, für welchen das, was zu seinem Beweis, oder wenn es ein praktischer ist, zu seiner Auflösung erfordert wird, nicht in den vorhergehenden vorbereitet worden wäre; und diese frühern Sätze pflegt man, um dem Gedächtniß zu statten zu kommen, jedesmal wieder kurz anzuzeigen.

§. 34.

Indessen geschieht es doch bisweilen, daß man einen Satz aus einer andern Wissenschaft mit einschieben muß, wenn man seiner eben bedarf; und hier kann es verstattet seyn, ihn blos mit seinem Beweis aufzunehmen, wenn auch gleich die Gründe seines Beweises in der Wissenschaft, wo er itzt gebraucht wird, nicht vorhanden wären. Man

giebt ihm alsdann den Namen **Lehnsatz** (Lemma) und zeigt kürzlich an, wo man das, was zu seiner Erläuterung dient, finden kann.

§. 35.

Ausser dem, was in der Wissenschaft aus Begriffen hergeleitet wird, und in so fern innere Nothwendigkeit hat, kann auch manches vorkommen das blos die äussere Form der Gegenstände betrift, die unsrer Willkühr überlassen ist. Sätze, die eine solche Form vorschreiben, werden deshald willkührliche genannt. Z. B. daß man nur bis auf die Menge von neun Einheiten eigne Zeichen hat; daß man die bekannten Größen mit den Anfangs- und die gesuchten mit den Endbuchstaben des Alphabets bezeichnet; oder den Fuß eben in zehn Theile; den Quadranten eines Kreises in 90 Theile eintheilt u. s. w. Hat man indessen einmal so etwas festgesetzt, so ist es alsdann nothwendig, dabey zu bleiben, oder es allemal anzuzeigen, wenn man wieder davon abgehen will.

§. 36.

Bey allen Arten von Sätzen läßt sich bisweilen noch mancherley Nützliches mit einweben, das aber wenn es geschähe, vielleicht ihrer Deutlichkeit und Faßlichkeit Eintrag thun würde; man bringt es deshalb lieber in eignen Absätzen bey, welche Anmerkungen (Scholia) genannt werden. Z. B. Geschichte der Erfindung, eigne Arten der Benutzung,

nutzung, weitere Erläuterung, Verhütung besorglicher Mißverständnisse u. dergl. Auch werden in diesem Lehrbuche zuweilen noch Absätze mit eingeschoben werden, die keinen der bisherigen Namen führen, und welche Betrachtungen enthalten, die man als Einleitungen zu den darauf folgenden Sätzen ansehen kann.

§. 37.

In der angewandten Mathematik gebraucht man auch neben den Grundsätzen noch die **Erfahrungen, Beobachtungen** und **Versuche** als Erkenntnißgründe. Dies sind Wahrheiten, die uns die Sinne lehren, je nachdem wir, entweder unerwartet und ungesucht, das in der Natur wahrnehmen, was eben darinn vorgeht; oder unsere Aufmerksamkeit besonders darauf richten, oder die Natur gleichsam um dies und jenes befragen. Man muß dabey sehr auf seiner Hut seyn, daß man sich nicht einbildet etwas erfahren oder beobachtet zu haben, was eigentlich nur ein Schluß, und vielleicht ein falscher Schluß aus einer Erfahrung ist. Fehler der Art, die überaus leicht begangen werden können, nennt man **Fehler des Erschleichens**.

§. 38.

Dies ist nun das Wesentliche der mathematischen Methode, die man auch mit mehrerm Grunde die wissenschaftliche nennt, weil sie nicht blos

bey der Mathematik, sondern überhaupt bey jeder Wissenschaft, wo vollständige Begriffe und allgemeingeltende Prinzipien vor den Sätzen derselben hergehen, statt finden kann, der Gegenstand mag übrigens seyn welcher er will.

§. 39.

Bey dem Vortrage selbst unterscheidet man noch die synthetische und analytische Art desselben. Jene kommt vor, wenn man von den einfachesten und ausgemachtesten Sätzen anfängt, und darauf immer andere baut bis man zum Hauptsatz kommt; diese hingegen, wenn man den Hauptsatz zuerst vorträgt, und denselben so lange entwickelt, bis man auf die ersten unleugbarsten Wahrheiten zurück gekommen ist. Jede von beyden allein hat einige Unbequemlichkeiten, die man vermeidet, wenn man sie beyde geschickt mit einander zu verbinden weiß.

§. 40.

Wer haushälterisch denkt, will immer erst von dem Nutzen einer Sache unterrichtet seyn, ehe er sich auf sie einläßt, zumal wenn ihre Erwerbung einige Aufopferung erfordert. So ist es auch mit der Mathematik gegangen. Man hat sich deswegen viele Mühe gegeben den Nutzen, den sie besonders in den verschiedenen Fächern der Gelehrsamkeit gewährt, umständlich ins Licht zu setzen, hierdurch hat man sie aber vielleicht weniger empfohlen,

pfohlen, als wenn man gar nichts von ihr gerühmt hätte. Man kann indessen wohl von ihr mit eben so viel Recht, als von jener Tugend behaupten, daß sie zu allen Dingen nütze ist; wenigstens wird man im Nahen und Fernen, im Großen und Kleinen nicht leicht etwas Wichtiges und Unentbehrliches finden, das nicht bey genauerer Untersuchung, wo nicht ein unmittelbares Product der Mathematik ist, doch wenigstens mathematische Hülfskenntnisse erfordert. Und wenn unsre Staatsmänner, Helden, Kaufleute, Künstler, Fabrikanten und Handwerker auch nicht Mathematiker von Profeßion sind, so werden sie doch einmüthig bekennen müssen, daß sie ihre Aufklärung in Entwerfung ihrer Plane, und ihre Geschicklichkeit in der Ausführung derselben, im Grunde immer Untersuchungen zu danken haben, die das Werk eines Mathematikers gewesen sind. Und wenn dann vollends vom angehenden Gelehrten, und davon die Frage ist, ob er auch Mathematik studieren soll? so muß er nur bedenken, daß er am Studium dieser Wissenschaft für alle übrigen Studien ohngefähr so ein Vorbild hat, wie es der Zeichner und Mahler am menschlichen Körper für die ganze Zeichen- und Mahlerkunst hat.

Die Arithmetik oder Rechenkunst.

§. 1.

Der Grundbegriff dieses Theils der Mathematik, so wie der in ihm zu betrachtenden Zahlen, ist bereits oben in (9 und 10) angegeben worden. Man macht billig mit der Arithmetik den Anfang, weil die Lehre von den Zahlen allenthalben in der Mathematik gebraucht wird. Ehe aber ihre Lehren selbst abgehandelt werden, müssen noch einige Begriffe und Grundsätze, welche auch für alle übrigen Theile ihren Nutzen haben, vorausgeschickt werden.

§. 2.

Erklär. Unter **Gleichheit** versteht man eine Einerleyheit in Absicht auf die Größe. Z. B. zwischen einem Reichsthaler und 24 Groschen, ist eine Gleichheit vorhanden. Das Zeichen der Gleichheit ist folgendes: =.

§. 3.

Grundſ. Jede Größe ist sich selbst gleich; und gleiche Dinge können in Absicht ihrer Größe für einander gesetzt werden; z. B. 24 gl. statt eines Reichsthalers oder 1 rthlr. = 24 gl.

§. 4.

Erklär. Ungleichheit ist vorhanden, wenn man das Eine nicht für das andere setzen kann.

Bey

Bey der Ungleichheit ist allemal eins größer oder kleiner, als das andere; größer, wenn ein Theil des Einen schon dem andern Ganzen gleich ist; und kleiner, wenn das Eine ganz so viel beträgt als ein Theil des andern. Das Zeichen der Ungleichheit ist: > welches man so zwischen die ungleichen Dinge setzt, daß die Oefnung dem Größern, und die Spitze dem kleinern zugekehrt ist. Z. B. 1 rthlr. > 1 gl.

§. 5.

Grunds. Das Ganze beträgt genau so viel als alle ihm aufeinmal zu gehörigen Theile zusammengenommen, oder es ist seinen Theilen gleich; größer als jeder einzelne Theil.

§. 6.

Grunds. Wenn zwey Größen einer dritten gleich sind, so sind sie auch untereinander gleich.

z. B. 2 rthlr. = 48 gl.
3 Guld. = 48 gl.

also 2 rthlr. = 3 Gulden.

§. 7.

Grunds. Was größer oder keiner ist, als eine von zwey gleichen Größen, das ist auch größer, oder kleiner, als die andere von denselben. Z. B.

1 Gulden = 16 gl.
1 Rthlr. > 16 gl.

also 1 Rthlr. > 1 Gulden.

Mehrere Grundsätze werden an ihrem Orte vorkommen.

Die Numeration.

§. 8.

Erklär. Die Anleitung wodurch man in den Stand gesetzt wird, alle, auch noch so große Zahlen, mündlich oder schriftlich, nach einem leichten und allgemeinen Gesetze auszudrücken, wird die Numeration genannt. Sie besteht fast aus lauter willkührlichen Sätzen.

Man pflegte sonst die Numeration mit unter die gleich hinter ihr folgenden Rechnungsarten zu zählen; allein da bey ihr nicht wie bey jenen, die Zahlen wirklich verändert werden, so giebt man ihr billig eine eigne Stelle und läßt sie den Rechnungsarten vorangehen.

§. 9.

Willk. Satz. Daß man die Einheit selbst: **Eins**, und noch eine dazu, zwey ꝛc. nennt, ist jedem schon bekannt ehe er noch weiß, daß es eine Arithmetik giebt. Die Übereinkunft aber, die man in Rücksicht dieser Zahlenbenennungen überhaupt getroffen

troffen hat, besteht darinn, daß man blos für die zehnerley ersten Mengen von Einheiten, besondere Namen braucht; in der Folge aber durch Zusammensetzungen, wobey die alten Namen wiederholt und mit neu dazugenommenen verbunden werden, alle übrigen ausdrückt. Z. B. wenn zu zehn Einheiten noch eine kommt, heißt sie mit einer zusammengezognen Benennung eilf, dann zwölf, alsdann folgen ordentliche Zusammensetzungen, wie dreyzehn u. s. w. Statt zehn-zehn braucht man das neue Wort: Zwanzig; und nach dieser Aehnlichkeit geht es fort bis auf dreyßig, vierzig, funfzig, sechzig, siebenzig, achtzig, neunzig; zehn mal zehn, nennt man hundert; zehn mal hundert, tausend; tausend mal tausend, Million; tausend mal Millionen, Billion u. s. w. Trillion; Quadrillion.

§. 10.

Anm. Dieß betrift den mündlichen Ausdruck der Zahlen; die Zeichen, wodurch er schriftlich geschieht, heißen Ziffern. Die ältern Völker wählten hierzu gewöhnlich die Buchstaben ihres Alphabets, wie man z. B. in griechischen und römischen Schriftstellern noch sieht. Die bey uns gebräuchlichen werden für arabische oder auch egyptische gehalten. Man hat ihrer nicht mehr als neun, die ebenfalls allgemein bekannt sind: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. und wodurch man also die Zahlen auch nur bis auf neun bezeichnen kann.

§. 11.

Willk. Satz. Um nun auch alle übrigen Zahlen dadurch anzudeuten, giebt man ihnen besondere Stellen, woraus gewisse Ordnungen entstehen, auf welche man deshalb eben so genau als auf das Zeichen selbst Acht haben muß. Das Gesetz dieser Stellung ist dieses. Jede Ziffer, wenn sie allein steht, wird angesehen als ob sie zu derjenigen Ordnung gehöre, von welcher man alle übrigen zu zählen anfängt und sie drückt so so viel Einheiten aus, als ihr Zeichen nach (10) andeutet. Jede Ziffer aber die um eine Stelle weiter zur Linken steht, bedeutet zehnmal so viel, als die neben ihr zur rechten stehende. Diese nächste Stelle zur linken macht nun die erste Ordnung aus; und so folgen immer weiter fort die zweite, dritte ꝛc Ordnung. Eine Ziffer in der zweiten Ordnung wird also, weil zehn mal zehn, hundert genannt wird, hundertmal so viel bedeuten als sie in ihrer absoluten Stelle bedeutet hätte.

§. 12.

Willk. Satz. Um die Ordnungen gehörig abzählen zu können, bedient man sich noch des Zeichens o; mit welchem diejenige Stelle ausgefüllt wird, in welcher sich keine geltende Ziffer befindet und welches deshalb Null genennt wird. Die o wird indessen nicht in alle mögliche Ordnungsstellen gesetzt, sondern nur in solche, wo es die Absicht

sicht ihres Gebrauchs erfordert. Bey folgender Ziffernreihe: 5734 gehört nach (11) die 4 noch zu keiner gezählten, oder zur Null-Ordnung; die 3 aber zur ersten, die 7 zur zweiten, die 5 zur dritten; wären nun in dieser Reihe die 7 und 4 nicht vorhanden und man wollte doch erkennen in was für Ordnungen die 3 und 5 befindlich wären, so müßte man sie so schreiben: 5030. In der vierten Ordnung ist nun zwar auch keine Ziffer vorhanden, allein man schreibt doch deswegen keine 0 in dieselbe, weil es itzt nicht nöthig ist, d. i. man schreibt nicht: 05030.

§. 13.

Willk. Satz. Man hat den Ziffern, in wiefern sie zu dieser oder oder jener Ordnung gehören, und in sofern immer andere Werthe haben, besondere Benennungen beygelegt, die sich auf folgende Weise bequem übersehen lassen:

Ziffern in der absoluten Stelle heisen **Einer**
— — — 1sten Ordnung — **Zehner**
— — — 2ten — — **Hunderter**
— — — 3ten — — **Tausender**

Diese Tausender sieht man wieder als so etwas Einfaches an, wie vorhin die Einer und nennt die in den weiter folgenden Ordnungen, nach voriger Art: **Zehntausender; Hunderttausender; Tausendmal tausender, oder Millionen;** welche letztere also

also zur 6ten Ordnung gehören. Hierauf erhält man wieder zehnfache Millionen; hundertfache Mill. tausendfache Mill. und so geht es immer weiter, wie sich am besten mündlich zeigen läßt.

§. 14.

Anm. Dieses Gesetz nennt man wegen des beständigen Fortschreitens von Zehn zu Zehn, das dekadische und glaubt, daß die Anzahl von zehn Fingern solches zuerst veranlaßt hätte.

§. 15.

Aufg. Man soll eine Reihe Ziffern nach dem dekadischen Gesetze aussprechen.

Auflös. 1) Man sondere von der Rechten zur Linken jedesmal drey Ziffern durch ein Komma ab.

2) Ueber diejenige Ziffer, an deren rechten Seite das zweite Komma steht, schreibe man Einen Strich; über die des vierten Komma, zwey Striche; über die des 6ten, 3 Striche u. s. w.

3) Man fange alsdann an der linken Seite an, und spreche auf die jedermann bekannte Art nur so viel Ziffern auf einmal aus, als bis zum nächsten Komma vorhanden sind; ihrer werden nach N. 1) nie mehr als drey vorhanden seyn.

4) Wo ein bloßes Komma steht, setze man zu den ausgesprochenen Ziffern allemal noch das Wort Tausend; wo aber Ein Strich über der Ziffer steht,

steht, sage man Millionen; wo zwey stehen, Billionen; wo drey stehen, Trillionen u. s. w. Ein Beyspiel und eine mündliche Erläuterung werden diese Regeln deutlicher machen. Z. B. es wäre folgende Zahl auszusprechen:

$32''', 407, 800'', 076, 000', 340, 256$ so sagt man nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch: zwey und dreyßig Trill. Vierhundert und sieben tausend, achthundert Billionen; Sechs und siebenzig tausend Millionen; Dreyhundert und vierzig tausend, zweyhundert und sechs und funfzig Einheiten. Wie dieses aber ganz eigentlich sollte ausgesprochen werden, wird beym mündlichen Vortrage angezeigt; nemlich wenn etwa diese Zahl eine große Menge Sandkörner angeben sollte, so müßte man sagen, sie enthielt 3 zehnfache und 2 einfache Trillionen solcher Körner; ferner 4 hunderttausendfache Billionen, keine zehntausendfache Bill. 7 einzelne tausendfache Billionen u. s. w. von denselben.

Beweis. Die Vorschriften in der Auflösung sind eine bloße Anwendung dessen, was der willk. S. in (13) enthielt; mithin wird die Befolgung derselben dem, in der Aufgabe verlangten, ein Genüge leisten.

§. 16.

Zus. Man kann bey jeder Zahl welche Ziffern von mehrern Ordnungen enthält, die Einheiten

der

der höhern auch mit den Namen der niedern belegen z. B. in der Zahl: 5346 kann man statt: fünftausend 3 hundert, auch sagen: drey und funfzig hundert; statt 5 tausend 3 hundert und vierzig, kann man sagen: fünfhundert vier und dreyßig Zehner u. s. w.

§. 17.

Aufg. **Man soll eine ausgesprochene Zahl aufschreiben.**

Aufl. Man schreibe nicht mehr als drey Ziffern auf einmal hin und setze, wenn sie blos etwas tausendfaches anzeigen, ein Komma darneben; sonst aber, wenn sie Millionen bedeuten, oben Einen, und bey Billionen 2 Striche u. s. w. Erläuterung und Beweis sind wie bey der vorigen Aufgabe.

§. 18.

Anm. Man muß sich bey diesem Aufschreiben vorsehen, daß man nicht etwa von einem Komma zum andern nur eine, oder zwey, oder gar keine Ziffer schreibt, wenn etwa für manche Stellen keine genannt werden sollte. Das Zahlengesetz erfordert, und das obige Beyspiel zeigt, daß jedesmal zwischen zwey Abtheilungen, drey Ziffern stehen mussen, und wo sie fehlen, mussen ihre Stellen mit Nullen ausgefüllt werden. Wenn indessen rechter Hand viele Nullen ohne eine geltende Ziffer bey sich zu haben, geschrieben werden müßten, so könnte man sich dieses Hinschreiben der Nullen ersparen, wenn man über die letzte geltende Ziffer

Ziffer zur rechten eine kleine setzt, welche die Ordnung derselben anzeigte. Diese Ordnungsziffer wird allemal aus so viel Einheiten bestehen, als sonst Nullen hätten geschrieben werden müssen z. B. $\overset{5\,4\,3}{46,\ 8}00,\ \overset{2\,1\,0}{000}$ könnte so geschrieben werden $46\overset{5}{8}$ welches eben so wie der vorige Ausdruck anzeigen würde, daß die Zahl aus 46 Mill. und 8 malhunderttausend Einheiten bestünde.

§. 19.

Anm. Man hat ausser dem Dekadischen Zahlengesetze auch andere z. B. das **Dyadische** wo man immer die nächste Ziffer zur Linken **doppelt** so viel gelten läßt als sie darneben zur rechten galt. Man braucht bey demselben ausser der 0, nur noch die einzige Ziffer 1. Dies erleichtert nun zwar auf einer Seite die Rechnungen ungemein, allein es hat auf der andern auch die Unbequemlichkeit, daß man nicht sehr große Zahlen durch eine lange Reihe von Ziffern ausdrücken muß. Leibnitz soll bey Gelegenheit einer alten Chinesischen Rechnung darauf gerathen seyn.

§. 20.

Anm. Ein anderes Zahlengesetz ist das Tetraktysche. Dieses sollen die alten Pythagoräer gebraucht haben und Weigel hat es wieder erneuert. Bey ihm gilt eine Ziffer in der nächsten Stelle zur linken allemal 4 mal so viel, als darneben zur rechten. Deshalb hat man hier ausser der 0, nur noch die Ziffern 1, 2 und 3 nöthig. Es gilt in Absicht seines Gebrauchs ohngefähr dasselbe von ihm, was von den vorigen ist bemerkt worden. Sobald man das Dekadische Zahlengesetz gründlich kennt,

fällt

fällt man leicht von selbst darauf, daß man eben so gut auch nur bis auf 3 oder 5, u. s. w. zählen könne.

§. 21.

Anm. Die Gestalt und den Gebrauch der römischen Ziffern lernt man beym Lesen der lateinischen Schriftsteller kennen. Die Anordnung derselben hat viele Aehnlichkeit mit der ehemals gewöhnlichen Rechnungsart auf dem Rechenbrete mit Linien; wovon man in Adam Riesens, und andern alten Rechenbüchern, das Verfahren beschrieben findet.

Die Rechnungsarten.

§. 22.

Erklär. Unter Rechnungsarten versteht man die Veränderungen, welche mit den Zahlen vorgenommen werden, wenn man aus den bekannten die unbekannten finden will. Da die Zahlen Größen sind, so kann man sich bey ihren Veränderungen nichts, als Vermehr- und Verminderungen gedenken (2.)

§. 23.

Erklär. Sowohl die Vermehr- als Verminderung kann auf eine zweyfache Art geschehen:

Erstlich so, daß zu einer vorhandenen Zahl nach Gefallen eine grössere oder kleinere; oder:

Zweitens so, daß die Zahl selbst immer wieder zu ihr gesetzt wird.

Die

Die erstere Art wird die Addition genannt. Die Zahlen die zusammen genommen werden, heisen Posten (numeri summandi) diejenige aber welche man findet, die Summe.

Die letztere Art wird die Multiplication genannt. Die Zahl welche mehrmals genommen wird heißt der Multiplicand; die welche angiebt wie vielmal sie genommen wird, der Multiplicator, beyde heisen auch mit einem gemeinschaftlichen Namen, Factoren. Die aber welche man findet, führt den Namen Product oder Factum.

Auf ähnliche Weise läßt sich auch eine doppelte Art der Verminderung gedenken:

Erstlich so: daß man von einer gegebenen Zahl überhaupt eine andere hinwegnimmt. Oder

Zweitens so: daß man von einer gegebenen eine andere so oft hinwegnimmt, als es angeht.

Die erstere Art heißt die Subtraction. Die Zahl welche vermindert wird, der Minuend; die welche davon genommen wird, der Subtrahend und die welche übrig bleibt, oder den Unterschied zwischen beyden anzeigt, der Rest oder die Differenz.

Die letztere Art heißt die Division oder die arithmetische Messung. Die Zahl welche getheilt oder gemessen wird, der Dividend; die welche sie theilt oder mißt, der Divisor; und die welche die Größe des Theils, oder die Menge der möglichen Hinwegnehmungen anzeigt, der Quotient.

§. 24.

Anm. Daß durch die Untersuchung, wie viel mal eine Zahl in der andern enthalten ist, eine Eintheilung oder Division bewerkstelligt werden kann; erhellet so: Man soll z. B. 12 Thaler unter 4 Personen theilen, so kann man erstlich jede Person einen Thaler nehmen lassen; diese Verrichtung kann man so oft wiederholen lassen, als noch Etwas von dem Gelde vorhanden ist. Bey jedem Gange bekommt allemal die Person 1 Thaler; also bekommt jede so viel Thaler, als Gänge geschehen sind. Weiß man also nur wie viel mal die Personen eine solche Wegnehmung verrichten können, so weiß man auch wie viel Thaler der Antheil beträgt den jede vom ganzen Gelde erhält.

§. 25.

Anm. Man pflegt diese vier Rechnungsarten in folgender Ordnung abzuhandeln: Addition, Subtraction, Multiplication, Division, weil sie in derselben einander unterstützen und hierdurch vom leichtern zum schweren übergegangen wird. Da bey allen ordentlichen Rechnungen alles auf die 4 allgemeinen Veränderungen: Dies zu jenem giebt dies; dies von jenem bleibt dies; dies mal jenes giebt dies; und dies steckt in jenem so und so viel mal — hinauskommt, so kann man nicht mehr als viererley Rechnungsarten annehmen; und wenn manche Schriftsteller deren mehrere angenommen haben, so ist es in einer ganz andern Bedeutung des Worts geschehen.

§. 26.

Aufg. Verschiedene Zahlen zusammen zu addiren.

Aufl. 1. Man schreibe sie so untereinander, daß allemal Ziffern von einerley Ordnungen zusammen kommen.

2. Man zähle zuerst die Einer zusammen, und von der Summe die man da erhält, schreibe man die Einer wieder unter die zusammengezählten, die Zehner aber darneben unter die Reihe der Zehner.

3. Auf ähnliche Art verfahre man auch mit den Ziffern der übrigen Ordnungen.

4) Am Ende zähle man die einzelnen Summen nach vorigen Regeln aufs neue zusammen, so erhält man die ganze Summe. Z. B.

```
3 8 6 5
  9 7 0
    9 7
      6
-------
    1 8 ⎫
  2 2   ⎪
1 7     ⎬ einzelne Summen
3       ⎭
-------
4 9 3 8   ganze Summa.
```

Um dieses Verfahren abzukürzen, kann man die bey jeder einzelnen Summe erhaltene Ziffer der höhern Ordnung so lange in Gedanken behalten, bis

 man

man an die nächst höhere Reihe kommt, und sie dann gleich mit dazu nehmen.

Beweis. Die sämmtlichen gegebenen Zahlen bestehen aus ihren Einern, Zehnern u. s. w. zählt man also diese einzeln zusammen und ordnet das gefundene in die Form eines Ganzen, so muß dieses eine Zahl enthalten, welche so groß ist, als die gegebenen zusammengenommen.

§. 27.

Anm. Um die Richtigkeit der Rechnungen zu prüfen, pflegt man sogenannte Proben bey ihnen anzubringen. Diese können so geschehen, daß man die Rechnung auf zweierley Art verrichtet, z. B. hier einmal von unten hinauf und dann von oben herunter zählt. Erhält man in beyden Fällen einerley, so ist es sehr wahrscheinlich, daß man richtig gerechnet habe. Von andern Proben, z. B. der durch die Subtraction, kann in den Vorlesungen geredet werden.

Wenn man die Addition blos anzeigen will, so setzt man zwischen die Posten das Zeichen: $+$ z. B. $3 + 4 = 7$.

§. 28.

Aufg. Von einer grössern Zahl eine kleinere abzuziehen.

Aufl. 1. Man schreibe die Zahlen wie bey der Addition untereinander, den Minuend oben und den Subtrahend darunter.

2. Wenn jede obere Ziffer grösser ist als die darunter stehende, so nehme man die Einheiten

welche

welche die untere anzeigt, von denen der oberen weg und setze den Rest wieder in dieselbe Reihe darunter. Z. B. von 8 6 7 5

ist abzuziehen	3 4 6 2
so bleibt	5 2 1 3

3. Wenn manche Ziffern des Minuends kleiner sind als die unter ihnen stehenden im Subtrahend, so holt man von der nächsten höhern 1 Einheit herüber, die hier 10 Einheiten gelten wird nach (11), von diesen und den schon vorhandenen verrichtet man alsdann das Abziehen. Es versteht sich, daß nun die Ziffer von welcher man die Einheit geholt oder geborgt hat, um 1 vermindert ist. Unter diesen Umständen ist es also nöthig, daß man den Anfang bey den Ziffern der niedrigsten Ordnung macht, welches bey solchen Fällen, wie in no. 2. nicht nöthig wäre. Z. B.

	6. 5. 3. 4
	4 8 5 6
	1 6 7 8

4. Wenn unter den Umständen der vorigen Nummer in den nächst höhern Stellen, Nullen stünden, so geht man so lange fort bis man auf eine Ziffer stößt, welche eine Einheit abgeben kann; diese legt man in die nächste Stelle zur rechten, wo sie zehn gilt; von diesen Zehnen läßt man 9 liegen und trägt die zehnte Einheit abermals weiter hinunter bis man an die Stelle kommt, wo der Abzug nicht geschehen konnte.

Es ist leicht einzusehen, daß nun in allen den Stellen wo vorhin 0 war, itzt 9 vorhanden, und die Ziffer wo man die Einheit herholte, doch nur um vermindert ist. Die Ursache dieser scheinbaren Widersinnigkeit, ist, daß die geborgte Einheit, weil sie von einer höhern Ordnung war, so viel Werth hat, daß sie nicht allein zum abziehen hinreicht, sondern auch noch mehrere andere Stellen mit Einheiten niederer Ordnungen anfüllen kann. Z. B.

$$\begin{array}{r} 4.\,0.\,0.\,0 \\ 2\;6\;8\;9 \\ \hline 1\;3\;1\;1 \end{array}$$

Um dieses weiterfortgehen zu vermeiden geben manche die Regel, das Borgen unten im Subtrahend vorzunehmen, und dann die Ziffer wo geborgt worden, 1 mehr gelten zu lassen; dies giebt zwar auch die richtige Differenz, das Verfahren aber ist ganz unwissenschaftlich.

Beweis. Man hat hier eben so wie bey der Addition das mit allen einzelnen Theilen gethan, was man mit dem Ganzen thun sollte, folglich muß man auch den völligen Rest zwischen dem Minuend und Subtrahend erhalten haben; und da man nach dem Dekadischen Zahlengesetz jede Einheit die um eine Ordnung höher ist, als 10 Einheiten von der nächstniedrigern ansehen kann (11), so muß auch das Verfahren mit dem Borgen seine Richtigkeit haben.

Nach (16) kann man die 400 im letztern Beyspiel als vierhundert Zehner ansehen; nimmt man nun von denselben Einen in die Stelle der Einer, so gilt er hier zehen und linker Hand bleiben nur noch dreyhundert neun und neunzig Zehner; auf diese Art wird es ganz begreiflich wie die 4 durchs Borgen zu einer 3 und die beyden darneben stehenden Nullen zu Neunen werden.

§. 29.

Anm. Die Probe bey der Subtraktion wird so verrichtet, daß man die Differenz zum Subtrahend addirt, da dann die Summe den Minuend geben muß. Will man die Subtraktion blos anzeigen, so schreibt man zwischen Minuend und Subtrahend einen — z. B. 8 — 5 = 3.

§. 30.

Nach (23) erhält man aus einem gegebenen Multiplicand und Multiplicator das Product, wenn man den erstern so viel mal zu sich addirt, als der letztere anzeigt. Dieses Verfahren würde bey großen Zahlen äusserst beschwerlich, ja unmöglich werden. Man brauche es also blos bey den Zahlen die noch unter zehn sind. Das Verzeichniß welches alle diese Producte enthält, nennt man das Einmal Eins. Es wird sich gleich zeigen, daß man mittelst desselben auch leicht Producte von größern Zahlen finden kann; und deshalb thut man wohl wenn man es auswendig lernt.

§. 31.

Aufg. Das Ein mal eins zu entwerfen.

Aufl. 1. Man schreibe die Zahlen von 1 bis 9 in eine Reihe.

2. Man addire jede zu sich selbst und setze die Summe unmittelbar darunter, so hat man alle Producte die herauskommen, wenn man die obersten Zahlen mit 2 multipliciren soll.

3. Zu diesen Producten addire man abermals die Zahlen der obersten Reihe, so erhält man die Producte die entstehen, wenn jene Zahlen hätten mit 3 multiplicirt werden sollen.

4. Dieses Verfahren wiederhole man auf ähnliche Art bis man die einfachen und achtfachen addirt gehabt hat. Nemlich

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Beweis. Daß eine Zahl zu sich selbst gesetzt, ihr zweyfaches giebt ist für sich klar; ein zweyfaches aber zum einfachen addirt, ist eben so viel als das einfache dreymal zu sich selbst gesetzt. Diese Betrachtungen lassen sich nun für alle in der Tafel enthaltenen Producte anstellen.

§. 32.

Anm. Wenn man bey einem Producte die Zahlen angiebt durch deren Multiplikation in einander es entstanden ist, so sagt man, es sey in seine Factoren zerfällt worden. Z. B. 6 kann in die Factoren 2 und 3 zerfällt werden. Diese Zerfällung geht bey allen Zahlen an, wenn man 1 und die Zahl selbst auch für Factoren gelten lassen will.

§. 33.

Erkl. Zahlen welche weiter keine Factoren, als 1 und sich selbst haben, heißen Primzahlen, z. B. 2, 3, 5 ꝛc. die übrigen aber zusammengesetzte.

§. 34.

Erkl. Zahlen deren einer Factor 2 ist, heißen gerade, die übrigen, ungerade. Z. B. 2, 4, 6 ꝛc.

§. 35.

Erkl. Ein Produkt das aus lauter gleichen Factoren besteht, nennt man eine Potenz oder Dignität des mehrmals vorkommenden Factors. Der Factor selbst heißt die erste Protenz, auch

die Wurzel. Die Zahl welche anzeigt, wievielmal der Factor vorkommt, wird der Exponent der Potenz genannt z. B. 9 = 3. 3 ist eine Potenz der 3; 3 ist die Wurzel und 2 der Exponent den man über sie zur rechten setzt z. B. $3^2 = 3.\ 3.$

§. 36.

Zus. Wenn man bey der Zerfällung einer zusammengesetzten Zahl die in ihr enthaltenen Einheiten durch Punkte ausdrückt, und diese, so wie hier geschehen ist, ordnet, so sieht man, daß jedes Produkt den einen seiner Factoren so vielmal, als 3 der andere die Einheit, in sich enthält; oder daß das Produkt aus dem einen seiner Factoren eben so entsteht, wie der andere aus der Einheit entstanden ist. Das Product ist also größer als jeder der beyden Factoren, wenn jeder derselben größer als 1 ist; dies rechtfertigt den Namen Vervielfältigung.

	4			
	.	.	.	.
3	.	.	.	.
	.	.	.	.

§. 37.

Zus. Ein paar Factoren geben einerley Product, es mag der erste Factor mit dem andern, oder der andere mit dem ersten multiplicirt werden, denn die vertikale Reihe der Punkte in (36) welche 3 enthält, steht 4 mal neben; und die horizontale, welche 4 enthält, 3 mal untereinander und giebt in beyden Fällen ein und ebendieselben 12 Punkte.

§. 38.

§. 38.

Zus. Wenn der eine Factor der etwa den Multiplicator vorstellt, aufs neue in 2 Factoren zerfällt werden kann, so kann man den Multiplicand statt seiner, mit seinen Factoren multipliciren und zwar so, daß man das bey der Multiplication mit dem erstern Factor erhaltene Product mit dem zweiten neuen Factor multiplicirt. Z. B. die Zahl 2 soll mit 6 multiplicirt werden, so läßt sich 6 in 2 mal 3 zerfällen, und man kann erstlich mit 2 multipliciren wo man 4 erhält und dies hernach mit 3, welches 12 giebt. Beym mündlichen Vortrage läßt sich leicht zeigen, daß eben dieß herauskommt, wenn man den Multiplicand erstlich 3 mal und dieses dreyfache hernach doppelt nimmt, und daß man überhaupt so viel Factoren als man will, in einer beliebigen Ordnung durch einander multipliciren kann, und immer einerley Product erhält.

2
. . } 2
. .
6 . . } mal
. .
. . } 3
. .

§. 39.

Zus. Jede Ziffer welche Zehner, Hunderter u. s. w. bedeutet, kann angesehen werden, als ein Einer der mit 10 oder 100 ꝛc. multiplicirt worden wäre. Sollte man nun eine Zahl z. B. mit 600 multipliciren, so könnte man sie nach (38) erstlich mit 6 und das Product hernach noch mit 100 multipliciren. Nach (11) aber wird dies letztere geschehen,

schehen, wenn man ein paar Nullen an sie hängt, oder ihre Ziffern um 2 Stellen weiter zur linken rückt.

§. 40.

Aufg. Zahlen welche größer, als die im Einmaleins befindlichen, sind, in einander zu multipliciren.

Aufl. I. Fall. Wenn der Multiplicand aus Ziffern von mehreren Ordnungen besteht, der Multiplicator aber ein Einer ist.

Man multiplicire nach dem Ein mal Eins alle Ziffern des Multiplicands von der Rechten nach der Linken mit dem Multiplicator, und schreibe die einzelnen Producte so untereinander, daß man sie am Ende addiren kann. Z. B.

```
 857            3600
   6   oder        6
----           -----
  42           21600
 30
48
----
5142
```

Man kann aber die Arbeit wieder wie oben in (26) verkürzen, wenn man die Ziffer der höheren Ordnung einstweilen in Gedanken behält und sie bey der Multiplication der nächsten Ziffer sogleich mit zum erhaltenen Product nimmt.

II. Fall.

II. Fall. Wenn der Multiplicand wie vorher, aber der Multiplicator eine Zahl ist an welcher Nullen hängen.

Man verfahre wie vorhin und hänge am Ende an das Product wieder so viele Nullen, als am Multiplicator hingen. Z. B.

$$\begin{array}{r} 846 \\ 900 \\ \hline 761400 \end{array}$$

Hängen am Multiplicand und Multiplicator Nullen, so kann man sie einstweilen weglassen; und nach der Multiplication der übrigen Ziffern, sie wieder an das Product anhängen oder wenn man die Factoren mit ihren Ordnungsziffern bezeichnet, so setzt man über das Product die Summe dieser Ziffern. Z. B. 9000. 700 = 6300000 oder $\overset{3}{9} \cdot \overset{2}{7} = \overset{5}{63}$

III. Fall. Wenn der Multiplicator aus Ziffern von mehreren Ordnungen besteht.

Man multiplicire zuerst mit der niedrigsten Ziffer, dann auch mit jeder höheren, alle Ziffern des Multiplicands, wie beym I Fall; fange aber das jedesmalige Product allezeit an derjenigen Stelle an zu schreiben, in welcher die Ziffer des Mul-

Multiplicators steht, mit welcher man eben multiplicirt, und addire am Ende die einzelnen Producte zusammen.

z. B.

```
     534
     246
    ----
    3204
   2136
  1068
  ------
  131364
```

Wenn zwischen den Ziffern des Multiplicators Nullen vorkommen, so übergeht man sie gänzlich, weil jede Größe mit 0 multiplicirt, eben so gut wieder 0 giebt, als wenn man 0 mit irgend einer Größe multiplicirt. Die Reihen von Nullen also, die bey einer solchen Multiplication entstehen, werden auf das Product gar keinen Einfluß haben. Z. B.

```
   324
   603
   ---
   972
 1944
 ------
 195372
```

Beweis. Beym 1sten Fall ist der Beweis wie in (26); das Einrücken bey der Multiplication mit den Ziffern aus den höheren Ordnungen gründet sich auf (39)

§. 41.

Anm. Die Probe läßt sich entweder so anstellen, daß man den Multiplicator mit dem Multiplicand multiplicirt, wo man wieder das vorige Product erhält

erhält (37); oder daß man das Product wieder mit einem von beyden Factoren nach Anleitung der folgenden Aufgaben dividirt, da dann allemal der andere Factor erscheinen wird. Das Zeichen der Multiplication ist gewöhnlich ein Punkt, den man zwischen die Factoren setzt; sonst braucht man auch ein X z. B. 3. 4 = 12 oder 3 X 4 = 12.

§. 42.

Wenn man die Division nach (23 und 24) verrichten wollte, so würde sie eben so wie die Multiplication ohne Einmal Eins, bey großen Zahlen unausführbar seyn. Dies leitet auf den Gedanken sich eines ähnlichen Hülfsmittels wie bey der Multiplication, zu bedienen. Dieses Hülfsmittel ist wieder das Einmal Eins, denn man darf nur bedenken, daß wenn 2 mal 3 sechs macht, alsdann hinwiederum die 2 in der 6 dreymal; oder 3 in der 6 zweymal enthalten seyn müsse. Dies wird augenscheinlich, wenn man die Einheiten wieder wie in (36) durch Puncte darstellt.

Es kann aber Zahlen geben, in welchen eine andere nicht mehrmal völlig, sondern ausser ein- oder etlichemalen nur noch ein Theil von ihr enthalten ist, welches sich ebenfalls durch Puncte anschaulich machen läßt. In solchen Fällen wird man also außer dem Quotienten noch einen Rest erhalten, von welchen das weitere in der Bruchrechnung vorkommt.

§. 43.

Aufg. Mit einer Zahl in eine andere grössere zu dividiren.

Aufl. I. Fall. Wenn der Divisor ein Einer, der Dividend aber eine aus Ziffern von mehreren Ordnungen bestehende Zahl ist.

1. Man suche nach (42) eine Ziffer die mit dem Divisor multiplicirt ein Product giebt, welches der höchsten Ziffer des Dividends gleich kommt, oder doch nicht so viel Einheiten weniger beträgt, als der Divisor in sich hält, und schreibe sie hinter den Dividend.

2. Das erhaltene Product setze man unter die Zahl des Dividends, mit welcher man die Division vorgenommen hatte und ziehe es von derselben ab.

3. Bleibt nichts übrig, so nehme man wie in N. 1. die Division mit der nächsten Ziffer des Dividends vor und fahre so fort bis ans Ende.

4. Bleibt aber bey der Abziehung ein Rest, so sehe man ihn als eine Menge Einheiten von der nächst niedrigern Ordnung an, nehme aus dem Dividend die folgende Ziffer welche von eben derselben niedrigern Ordnung ist, dazu, und verrichte sodann mit diesen beyden die Division wie in no.

2. z. B. der Divisor sey 3 und der Dividend 3740, so steht die Rechnung so:

```
3 | 3 7 4 0 | 1 2 4 6 Quotient
  | 3
  -----
    7
    6
  -----
    1 4
    1 2
    -----
      2 0
      1 8
      -----
        2 Rest.
```

Hier ist der 3te Theil von den 3 Tausendern im Dividend, 1 Tausend, wo man aber nicht nöthig hat, 3 Nullen an die 1 zu hängen, sondern diesen tausendfachen Werth erhält sie schon dadurch, daß bey Fortsetzung der Division noch die drey Ziffern 246 hinter sie kommen. Da nun 3 mal 1, drey giebt, so bleibt nach dem Abziehen nichts übrig. Man sieht also wie viel der 3te Theil von den nächsten 7 Hundertern ist, und findet etwas mehr als 2 hundert, aber noch nicht 3 hundert; Um also zu sehen wie viel dieses **Mehr** beträgt, multiplizirt man 3 mit 2 und zieht die erhaltene 6 von der 7 ab, so bleit noch 1 übrig, welches 1 hundert seyn wird. Dieses 1 Hundert verwandelt man in 10 Zehner und nimmt die darneben stehenden 4 Zehner mit dazu, so hat man deren zusammen 14

und hiervon wird wieder der dritte Theil 4 Zehne[r] und etwas mehr betragen; das Uebrige bleibt de[r] mündlichen Erläuterung vorbehalten.

Wenn man die Division als eine Messung nach (23) betrachtet, so kann man sich im obigen Beispiel vorstellen, 3 sey in 3 tausend, 1 tausendmal enthalten, welches übrigens im Verfahren selbst nichts ändert.

II. Fall: Wenn auch der Divisor aus Ziffern von mehreren Ordnungen besteht.

1) Man nimmt so viel von den höchsten Ziffern des Dividends als nöthig sind, um den Divisor 1 bis 9 mal enthalten zu können.

2) Man untersucht nun wie beym I Fall, wie vielmal die höchste Ziffer des Divisors in der höchsten des Dividends enthalten ist, und nimmt vor der Hand an, daß auch der ganze Divisor so vielmal in den genommenen Ziffern des Dividends enthalten sey.

3) Da dieses nicht allemal zutrift, so multiplicirt man den angenommenen Theil des Quotienten mit dem ganzen Divisor und sicht, ob er sich von den genommenen Ziffern des Dividends abziehen läßt. Geht dieses nicht, so vermindert man den Theil des Quotienten so lange bis man ein Product erhält,

hält, welches sich abziehen läßt. Uebrigens verfährt man wie beym Isten Fall. Z. B.

```
24 | 4846 | 201 Quot.
   | 48   |
   ------
      46
      24
     ----
      22 Rest.
```

Hier nimmt man die 48 hundert vom Dividend und setzt voraus, daß 24 in 48 so vielmal enthalten sey, als 2 in 4, hier 2 hundertmal, welches auch bey angestellter Prüfung richtig befunden wird. Nun darf man aber bey Fortsetzung der Division nicht gleich die 46 Einheiten nehmen und sehen wie vielmal 24 wieder darinn enthalten ist, denn sonst würden im Quotienten auf die Hunderter sogleich Einer folgen, welches gegen (18) wäre. Man nimmt also vorher die nächste Ziffer nur allein vor sich und setzt, weil 24 kein einzigesmal darinn enthalten ist, 0 in den Quotienten; und nun ist es erst Zeit auch noch die 6 mit zu den 4 Zehnern zu nehmen, wo sich dann ergiebt, daß zwar wie anfangs, 2 in 4 wieder 2 mal, aber deswegen doch nicht 24 in 46 auch 2 mal enthalten ist, weil 2 mal 24 schon 48 macht; man setzt also diesmals nur 1 in den Quotienten und bemerkt den Rest 22.

Beweis. Man hat nach den gegebenen Vorschriften gefunden, wie vielmal der Divisor in je-

dem Theil des Dividends enthalten ist, folglich auch nach (5) wie vielmal er im Ganzen enthalten ist.

§. 44.

Zus. Wenn beym 1sten Fall der Divisor grösser ist, als die höchste Ziffer des Dividends, so nimmt man gleich die nächste noch mit dazu und verfährt übrigens wie vorhin. Z. B.

```
5 | 3 4 5 | 6 9
  | 3 0   |
  -----
    4 5
    4 5
    ---
      0
```

§. 45.

Zus. Wenn am Divisor Nullen hängen, so kann man sie abschneiden und blos mit den geltenden Ziffern desselben die Division verrichten. Man muß aber zugleich eben soviel von den niedrigsten Ziffern des Dividends absondern; diese abgesonderten Ziffern machen alsdann einen Theil des am Ende bleibenden Restes aus. Z. B.

```
6, 0 0 | 8 6, 4 3 | 1 4
       | 6        |
       -----
         2 6
         2 4
       ---------
           2 4 3 Rest.
```

Wenn

Wenn am Divisor und Dividend Nullen hängen, so kann man sie weglassen und statt ihrer die Ordnungsziffern brauchen. Ueber dem Quotienten wird alsdann die Differenz zwischen der Ordnungsziffer des Divisors und Dividends gesetzt werden müssen. Z. B. Divisor 600; Dividend 240000, so kann man nehmen $\overset{2}{6} \mid 2\,\overset{4}{4} \mid \overset{2}{4} = 400.$

§. 46.

Zus. Wenn sich der Multiplicator in Factoren zerfällen läßt, so kann man nach Art der Multiplication in (38) den Dividend erstlich mit dem Einen Factor dividiren, und den Quotienten sodann aufs neue mit dem andern u. s. w. Z. B. der Divisor sey 6, und der Dividend 126, so dividirt man erstlich mit 2 | 1 2 6 | 6 3 und nun abermals mit 3 | 6 3 | 2 1 Quotient.

§. 47.

Anm. Dieses Verfahren hat Unbequemlichkeiten wenn beym Dividiren mit den ersten Factoren Reste bleiben, deswegen man sich desselben nur alsdann bedienen kann, wenn man mit Brüchen rechnen gelernt hat. Verschiedene Arten zu dividiren können in den Vorlesungen gezeigt werden. Da man den Quotienten so vielmal nehmen muß als der Divisor anzeigt, wenn der Dividend herauskommen soll, so muß der Quotient allemal kleiner als der Dividend seyn, wenn der Divisor grösser als 1 ist, denn der Divisor steckt so oft im Dividend, als die Einheit im Quotienten (36).

§. 48.

Anm. Die Probe macht man bey der Division dadurch, daß man den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt und den etwa vorhandenen Rest zum Product addirt, da dann der Dividend wieder erscheint.

Will man die Division blos anzeigen, so setzt man den Divisor unter den Dividend und zieht zwischen durch einen Strich z. B. $\frac{12}{4} = 3$. Sonst pflegte man auch Dividend und Divisor neben einander und dazwischen das Zeichen (:) zu setzen z. B. $12 : 4 = 3$.

§. 49.

Grundſ. Wenn man **Gleiches** zu **Gleichem** addirt; **Gleiches** von **Gleichem** subtrahirt; **Gleiches** mit **Gleichem** multiplicirt; **Gleiches** durch Gleiches dividirt, so kommt allemal wieder Gleiches heraus.

z. B. $3 + 4 = 7$ oder $3 + 4 = 7$
addirt $2 = 2$ subtr. $2 = 2$

$3 + 4 + 2 = 9$ $\quad$ $3 + 4 - 2 = 5$

oder $6 - 4 = 2$ oder $6 - 4 = 2$
mult. $2 = 2$ div. $2 = 2$

$12 - 8 = 4$ $\quad$ $3 - 2 = 1$

§. 50.

Grundſ. Wenn man bey ungleichen Größen **Gleiches** addirt, davon subtrahirt, damit multiplicirt

tiplicirt oder darein dividirt, so erhält man wieder Ungleiches, und zwar größeres bey den größeren; kleineres bey den kleineren. Z. B.

$$\begin{array}{rl} & 6 + 4 > 8 \\ \text{add.} & \quad\;\; 2 = 2 \\ \hline & 6 + 4 + 2 > 10 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 6 + 4 > 8 \\ \text{subtr.} & \quad\;\; 2 = 2 \\ \hline & 6 + 4 - 2 > 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 6 + 4 > 8 \\ \text{mult.} & \quad\;\; 2 = 2 \\ \hline & 12 + 8 > 16 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 6 + 4 > 8 \\ \text{div.} & \quad\;\; 2 = 2 \\ \hline & 3 + 2 > 4 \end{array}$$

§. 51.

Grundſ. Wenn man bey gleichen Größen Ungleiches addirt oder damit multiplicirt; so erhält man wie beym vorigen Satze Größeres beym Größern und Kleineres beym Kleinern. Z. B.

$$\begin{array}{rl} & 6 + 4 = 10 \\ \text{add.} & \quad\;\; 3 > 2 \\ \hline & 6 + 4 + 3 > 12 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 6 + 4 = 10 \\ \text{mult.} & \quad\;\; 3 > 2 \\ \hline & 18 + 12 > 20 \end{array}$$

§. 52.

Grundſ. Wenn hingegen von gleichen Größen auf der einen Seite Größeres, auf der andern Kleineres abgezogen, oder solche auf der einen Seite mit Größerm und auf der andern mit Kleinerem dividirt werden, so erhält man auf dieser einen

Seite etwas Kleineres und auf der andern etwas Größeres. Z. B.

	$3 + 9$	$=$	12
subtr.	3	$>$	2
	$3 + 9 - 3$	$<$	10

	$3 + 9$	$=$	12
div.	3	$>$	2
	$1 + 3$	$<$	6

Von den Brüchen.

§. 53.

Die bisher betrachteten Zahlen nennt man ganze Zahlen, in wiefern ihre Einheiten nicht als Theile einer andern Einheit betrachtet werden. Nun ist aber schon in der Einl. (6 u. 7) bemerkt worden, daß man jede Einheit immer wieder in neue Einheiten theilen könne, die in Absicht der eingetheilten von geringerer Art sind, und diese Betrachtung leitet auf eine neue Art von Zahlen.

§. 54.

Erklär. Wenn man die Einheiten von einer ganzen Zahl wieder in kleinere Einheiten theilt, so heißt eine, oder eine gewisse Menge derselben **eine gebrochene Zahl** oder ein **Bruch**.

§. 55.

Anm. Man sieht hieraus, daß der Begriff vom Bruch ganz relativ ist, und eine gebrochene Zahl nur in Beziehung auf eine andere die man sich

als

als ganz gedenkt, so genannt werden kann, übrigens aber so gut wie die ganze, aus Einheiten besteht, nur daß diese Einheiten nicht von dem Werth sind wie die, woraus die ganze Zahl besteht, Z. B. man sieht 3 Rthlr. als eine ganze Zahl an, wo die Einheit, **Rthaler** heißt. Diese Einheit läßt sich nun wieder in 3 andere theilen welche man zum Unterschied von jener, **Drittel Rthlr.** nennen kann; zwey solcher Drittel sind in dieser Rücksicht ein Bruch vom Rthaler, ob sie gleich in einer andern etwas Ganzes, z. B. einen ganzen Gulden ausmachen.

§. 56.

Zus. Nach diesen Betrachtungen wird den Brüchen alles zukommen müssen, was zuvor von ganzen Zahlen ist gelehrt worden; denn sie sind als ganze Zahlen anzusehen, deren Einheiten blos von einem geringern Werth sind.

§. 57.

Anm. Auf den Begriff eines Bruchs wird man besonders geleitet, wenn man in eine Zahl dividiren soll, welche kleiner als der Divisor ist. Z. B. man hat 2 Rthlr. worein sich 3 Personen theilen sollen. Hier kann der Quotient keine ganze Einheit, aber doch auch nicht völlig Null werden. Gesetzt diese Personen wüßten gar nichts von Arithmetik, so würde ihnen die Vernunft sagen, sie müßten, jeden Thaler in so viel gleiche Theile theilen als Ihrer wären, also in 3, und Jeder müßte allezeit Einen nehmen, da dann Jeder 2 Drittel eines Thalers erhalten würde; oder man stelle sich die Sache so vor: aus 2 ganzen

Thalern werden 2 mal 3 oder 6 Drittel gemacht und dann wird in diese mit der 3 dividirt, so giebt der Quotient 2 Drittel einer ganzen Einheit. Diesen Quotienten oder Bruch pflegt man nun eben so auszudrücken, wie es in (48) angegeben worden ist, nehmlich $\frac{2}{3}$.

§. 58.

Erkl. Die Zahl über dem Strich wird bey einem Bruch der Zähler und die darunter stehende der Nenner genannt, weil diese letztere gleichsam den Werth benennt, welchen die Einheiten der gebrochenen Zahl in Absicht der zur ganzen gehörigen haben. Zehler aber heißt die obere, weil sie die Anzahl der Einheiten, welche die gebrochene Zahl enthält, vorzählt.

§. 59.

Zus. Bey Erwägung der Größe eines Bruchs darf man weder auf den Zähler noch auf den Nenner allein, sondern man muß auf beyde zugleich sehen. Ist nemlich der Nenner viel grösser als der Zähler, so ist die höhere Einheit in viel Theile getheilt worden und wenige derselben machen den Bruch aus, also ist er klein. Wenn hingegen Zähler und Nenner fast gleich sind, so hat man beynahe alle die geringern Einheiten wieder beysammen, in welche die höhere ist getheilt worden und so ist der Bruch groß z. B. $\frac{2}{3}$ ist ein viel grösserer Bruch als $\frac{32}{1008}$. Sind Zähler und Nenner gleich, so ist der Bruch allemal $= 1$. z. B. $\frac{5}{5} = 1$.

§. 60.

§. 60.

Anm. Wenn die Einheit in immer mehrere Theile getheilt, und von denselben immer nur Einer genommen wird, so wird dieser kleine Theil immer unbeträchtlicher; sind der Theile unendlich viele, so wird jeder unendlich klein, so daß man ihn von der 0 nicht mehr unterscheidet. Eine unendlich große Zahl bezeichnet man mit ∞, und nun wird der Ausdruck $\frac{1}{\infty} = 0$ verständlich seyn. Er zeigt nemlich eine Division der 1 an, wo der Divisor eine unendlich große und der Quotient eine verschwindende Zahl ist. Da nun der gebrauchte Divisor ein Quotient wird, wenn man den vorigen Quotienten zum Divisor nimmt so wird auch $\frac{1}{0} = \infty$ seyn.

§. 61.

Zus. Zwey Brüche werden also einander gleich seyn, wenn der Zähler des einen ein eben so großes Stück von seinem Nenner ist, als der Zehler des andern von dem seinigen. Z. B. $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{4}$ sind einander gleich. Hiernach läßt sich einerley Bruch in unzählicherley Gestalten darstellen.

§. 62.

Zus. Man kann jeder Zahl die Form eines Bruchs geben, wenn man 1 unter sie setzt und einen Strich dazwischen zieht, z. B. $5 = \frac{5}{1}$.

§. 63.

Zus. Auch kann man einer ganzen Zahl die Form eines Bruchs geben, der einen beliebigen Nenner

Nenner hat; man multiplicirt nemlich die ganze Zahl mit derjenigen die der Nenner des Bruchs werden soll und setzt unter das Product, mit dazwischen gezognem Strich, die Zahl die man zum Nenner erwählt hat. Z. B. die Zahl 5 soll in Drittel verwandelt werden, so wird, weil 1 drey Drittel macht, 5, fünfmal 3 Drittel also $\frac{15}{3}$ machen.

§. 64.

Zus. Hat man eine ganze Zahl mit einem anhängenden Bruch, und will die ganzen Einheiten mit unter die Benennung des Bruchs bringen, so kann man die ganze Zahl nach (63) zu solchen Einheiten machen als der Nenner des anhängenden Bruchs anzeigt und dann die im Zähler dieses Bruchs befindlichen zu ihnen addiren z. B. $5\frac{2}{3} = \frac{15}{3} + \frac{2}{3} = \frac{17}{3}$

§. 65.

Erkl. Brüche wo der Zähler kleiner als der Nenner ist, wie in (55, 57) werden reine oder eigentliche; hingegen die in (59) am Ende, (62 bis 64,) beschriebenen, unreine oder uneigentliche genannt. Bey den erstern ist allemal der Werth kleiner als 1, (59).

§. 66.

Zus. Jeder unreine Bruch läßt sich durch die Division in eine ganze Zahl verwandeln, an welcher zuweilen noch ein reiner Bruch hängen kann. Divisionsexempel wie in (43) sind als solche unreine

reine Brüche anzusehen, so ist z. B. $\frac{3740}{3} = 1246\frac{2}{3}$ und man kann nun sagen: 3 ist in 3740 völlig 1246 mal, und dann noch der 3te Theil von ihr, 2 mal darinn enthalten. Auf diese Weise ist nun die Division erst als vollendet anzusehen.

§. 67.

Lehrs. Wenn man den Zähler und Nenner eines Bruchs mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt, so wird der neue Bruch dem vorigen wieder gleich.

Beweis. Durch die Multiplication des Nenners wird die höhere Einheit aus welcher der Bruch entsteht, in so viel mehrere Theile getheilt als die Multiplicir-Zahl andeutet; eben so viel mal wird also itzt jeder Theil kleiner. Durch Multiplikation des Zehlers aber wird wieder die Menge der zum Bruch gehörigen Theile so vielmal größer, als eben diese Multiplicir-Zahl andeutet, folglich bleibt der Bruch in seinem vorigen Werth; und blos die niedern Einheiten die ihn ausmachen, sind durch jene Multiplication geändert worden.

Eben diese Betrachtungen erstrecken sich auch auf die Division. In je weniger Theile man die ganze Einheit theilt, desto größer werden die neuen Einheiten. Nimmt man also deren um so vielmal weniger, um wie vielmal sie größer geworden sind,

so

so hat man dem Werth nach, wieder was ma[n]
vorhin hatte.

§. 68.

**Aufg. Einen Bruch, ohne seinen Werth z[u]
ändern, durch kleinere Zahlen auszudrücken.**

Aufl. Man suche die Factoren des Zählers un[d]
Nenners und dividire mit denen die in jedem vo[r]
kommen, sowohl Zehler als Nenner. Z. B. $\frac{15}{21}$
hier besteht 15 aus 3. 5 und 21 aus 3. 7; der ge[-]
meinschaftliche Factor ist also 3 und hiermit ve[r-]
richtet man die Rechnung so:

$$\overset{3}{\frac{15}{21}\Big|\frac{5}{7}} \quad \text{so ist } \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

Wenn Zähler und Nenner durch Factoren aus[-]
gedrückt, und in beyden einer oder mehrer[e]
überein sind, so kann man diese gegen einande[r]
ausstreichen z. B. $\frac{3.\ 5}{3.\ 7} = \frac{5}{7}$

Man muß übrigens bedenken, daß wenn auf dies[e]
Weise einmal oben oder unten alles ausgestriche[n]
würde, nun nicht etwa 0, sondern jedesmal 1 bleib[t]
Z. B. $\frac{3}{3.7} = \frac{1}{7}$ oder: $\frac{2.\ 5}{5} = \frac{2}{1} = 2$

§. 69.

Anm. Man pflegt dies Geschäfte das Aufhebe[n]
der Brüche zu nennen. Zur Erfindung der Fa[c-]
toren

toren hat man besondere Tafeln; auch für Factoren die nicht über 9 gehen, leichte Regeln. Z. B. wenn sich die niedrigste Ziffer einer Zahl durch 2 theilen läßt, so ist 2 ein Factor dieser Zahl sie mag so groß seyn als sie will. Wenn man die Ziffern einer Zahl als bloße Einer ansieht und die Summe derselben durch 3 theilbar ist, so ist 3 ein Factor dieser Zahl; ist eine solche Summe durch 9 theilbar, so ist 9 ein Factor der Zahl. Zahlen wo die 2 niedrigsten Ziffern durch 4 theilbar sind, haben die 4 zum Factor, und 8, wenn die 3 letzten Ziffern derselben durch 8 theilbar sind. Eine Zahl deren niedrigste Ziffer 5 oder 0 ist, hat allemal 5 zum Factor.

Ueberhaupt läßt sich jeder größte gemeine Theiler von zwey Zahlen nach folgender Regel finden: 1) Man dividire die kleine Zahl in die große; bleibt kein Rest, so ist die kleine Zahl selbst der gemeine Theiler 2) bleibt aber ein Rest, so dividire man mit demselben in den vorigen Divisor und diese Arbeit setze man so lange fort, bis man auf eine Division gekommen ist, wo kein Rest bleibt. Die Zahl die bey derselben der Divisor gewesen ist, wird der verlangte größte gemeinschaftliche Theiler seyn. Z. B. man sucht den gemeinen Theiler von $\frac{95}{171}$ so steht die Rechnung so

```
95 | 171 | 1
   |  95 |
   ------
      76 | 95 | 1
         | 76 |
         ------
            19 | 76 | 4
               | 76 |
               ------
                  0
```

Die

Die gesuchte Aufhebezahl ist also 19, nemlich

$$\underbrace{}_{19} \qquad \frac{95}{171} \Big| \frac{5}{9}$$

auf die bey den Divisionen erhaltenen Quotienten wird hier nicht geachtet. Wenn die Division so lange fortgesetzt werden muß, daß endlich der Divisor 1 wird, so ist es ein Zeichen daß der Bruch unter keiner kleinern Gestalt dargestellt werden kann und die Zahlen des Zählers und Nenners heißen nun Primzahlen unter sich, (numeri primi inter se) z. B. bey dem Bruch $\frac{9}{16}$.

§. 70.

Aufg. Eine Zahl zu finden in welcher sich mehrere andere ohne Rest dividiren lassen.

Aufl. Man multiplicire sie alle durch einander so wird das Product die verlangte Zahl seyn. Diese wird aber bisweilen so groß werden, daß man zum bequemern Gebrauch eine kleinere wünscht; um nun eine solche wenigstens in manchen Fällen zu erhalten, verfahre man so: 1) Man nehme die größte von den gegebenen Zahlen vor sich und multiplicire sie mit der kleinsten die nicht hat darinnen aufgehen wollen.

2) Dieses Product multiplicire man abermals mit der nächst größern, die nicht darinnen aufgehen will u. s. w. bis ans Ende, so wird man eine erhalten, in welcher sie alle aufgehen. Z. B. Die Zahlen sind 2, 3, 5 und 9, so geht 2 nicht in 9 auf, also sagt man 2. 9 = 18; in 18 geht 3 auf,

auf, also braucht man hier nicht zu multipliciren, 5 aber geht nicht in 18 auf, also nimmt man 5. 18 = 90, worinn alle aufgehen müssen.

Beweis. Die zuletzt gefundene Zahl hat alle übrigen zu Factoren, folglich muß sie auch durch jede theilbar seyn. (41)

§. 71.

Aufg. Brüche von verschiedenen Nennern unter einerley Benennung zu bringen.

Aufl. 1) Man suche nach (70) eine Zahl in welche sich alle vorhandenen Nenner ohne Rest dividiren lassen.

2) Man dividire wirklich mit jedem Nenner in dieselbe.

3) Mit dem erhaltenen Quotienten multiplicire man Zähler und Nenner desjenigen Bruchs dessen Nenner in voriger Nummer war gebraucht worden, so werden alle Brüche die in no. 1 gesuchte Zahl zu ihrem gemeinschaftlichen Nenner bekommen. Z. B. Man hat die Brüche $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{7}{9}$, so ist die zu suchende Zahl 90 und die Multiplicirzahl für den ersten Bruch $\frac{90}{2} = 45$; für den 2ten 30, für den dritten 18 und für den 4ten 10; und die neuen Brüche werden seyn: $\frac{45}{90}$; $\frac{60}{90}$; $\frac{54}{90}$; $\frac{70}{90}$.

Beweis. Daß die neuen Brüche den vorigen gleich sind, erhellet aus (67), und daß alle Nen-

ner der nach no. 1. gesuchten Zahl, folglich unter einander selbst, gleich werden, folgt aus (41 und 6).

§. 72.

Anm. Wenn die Nenner der Brüche nicht lauter Primzahlen sind, sondern manche einen gemeinschaftlichen Factor haben, so kann man zum gemeinschaftlichen Nenner zuweilen noch eine kleinere Zahl erhalten als sie die Aufgabe (71) giebt z. B. die Brüche wären $\frac{1}{3}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{7}{15}$ so geht 3 in 15 auf, aber 6 nicht; da nun die Factoren von 6 = 2. 3 und die von 15 = 5. 3 folglich der Factor 3 beyden Zahlen 6 und 15 gemeinschaftlich ist, so braucht man 15 nur noch mit 2 zu multipliciren, wo alsdann das Product 30 alle Nenner als Factoren enthalten wird.

§. 73.

Anm. Wenn man blos 2 Brüche hat, so kann man auch so verfahren: Man multiplicirt jedes Bruchs Zähler und Nenner mit dem Nenner des andern Bruchs. Bey mehrern Brüchen kann man nach (70 Aufl.) jedes Bruchs Zähler und Nenner mit dem Product aller übrigen Nenner multipliciren, wodurch aber meist sehr große Zahlen entstehen, die man in vielen Fällen vermeidet wenn man nach (71) verfährt.

§. 74.

Aufg. Brüche zu addiren.

Aufl. 1. Wenn sie einerley Nenner haben so addire man die Zähler nach (26) und setze unter die Summe den gemeinschaftlichen Nenner. 2

Wen

Wenn der Nenner nicht grösser ist als der Zähler, so dividire man damit in denselben, um die in der Summe enthaltenen ganzen Einheiten zu bekommen.

3. Wenn die Brüche nicht einerley Benennung haben, so bringe man sie nach voriger Aufgabe dazu und verfahre dann wie vorhin. Z. B. $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{9}{8} = 1\,\frac{1}{8}$ oder: $\frac{1}{3} + \frac{5}{6} + \frac{7}{15}$; dies setze man so:

30			
10)	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{30}$	10
5)	$\frac{5}{6}$	$\frac{25}{30}$	25
2)	$\frac{7}{15}$	$\frac{14}{30}$	14
			$\frac{49}{30} = 1\,\frac{19}{30}$

Beweis. Brüche sind so gut Zahlen als die welche aus ganzen Einheiten bestehen (56) Durch den Nenner aber wird die Art ihrer Einheiten bestimmt; haben sie also einerley Nenner, so können sie wie andere ganze Zahlen behandelt werden, und man hat blos nöthig die Art der Einheiten immer in Andenken zu erhalten, welches dadurch geschieht, daß man den Nenner wieder unter die Summe setzt. Der Beweis für No. 2. folgt aus (66).

§. 75.

Zus. Befinden sich auch Ganze bey den Brüchen, so addirt man sie ebenfalls wenn man mit den Brüchen fertig ist, und nimmt die von den Brüchen erhaltenen ganzen Einheiten mit dazu. Z. B.

man hätte ausser den obigen Brüchen auch noch 6 und 8 Ganze gehabt, so gäben diese in der Summe 14 und die aus den Brüchen gefundene Einheit dazu = 15.

§. 76.

Aufg. Einen kleinern Bruch von einem grössern zu subtrahiren.

Aufl. Wenn die Brüche gleiche Nenner haben, so subtrahire man blos die Zähler von einander und setze unter den Rest wieder den gemeinschaftlichen Nenner. Bey ungleichen Nennern nimmt man vorher wieder die Reduction zu gleicher Benennung vor. Z. B. $\frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$ oder $\frac{8}{9} - \frac{7}{15}$; dies setzt man so:

$$\begin{array}{rr|r} & 45 & \\ 5) & \frac{8}{9} & 40 \\ 3) & \frac{7}{15} & 21 \\ \hline & & \frac{19}{45} \end{array}$$

Der Beweis ist wie in der vorigen Aufgabe.

§. 77.

Zus. Wenn noch Ganze bey den Brüchen stehen, so subtrahirt man sie ebenfalls von einander, wenn die Subtraction bey den Brüchen beendigt ist. In solchen Fällen kann auch der Minuend bey den Brüchen kleiner als der Subtrahend seyn; man borgt alsdann eine Einheit von den Ganzen des Minuends und verwandelt sie in einen Bruch, dessen Zähler und Nenner so viel betragen als der gemein=

meinschaftliche Nenner der Brüche Einheiten hat. Von diesem und dem Minuend wird sich dann allemal der Subtrahend abziehen lassen.

§. 78.

Aufg. Einen Bruch mit einem andern zu multipliciren.

Aufl. Man multiplicire den Zähler des einen mit dem Zähler des andern; und auch den Nenner des einen, mit dem Nenner des andern; und setze beyde Producte in der vorigen Ordnung wieder Bruchweise unter einander. Z. B. $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

Beweis. Nach (36) soll das Product den einen Factor so vielmal enthalten, als der andere die ganze Einheit enthält; nun enthält hier der Factor $\frac{2}{5}$ den 5ten Theil der Einheit 2 mal; man muß also auch vom andern Factor erstlich den 5ten Theil suchen und diesen hernach 2 mal nehmen. Dieser 5te Theil muß vom Zähler genommen werden, da der Nenner nur blos dazu vorhanden ist, um die Art der Einheiten zu bemerken. Vom Zähler 3 läßt sich aber der 5te Theil nicht bequem nehmen; also verwandle man den Bruch $\frac{3}{4}$ in einen andern wo der Zähler so beschaffen ist, daß er sich ohne Rest mit 5 dividiren läßt; dies geschieht wenn man Zähler und Nenner mit der Divisionszahl 5, multiplicirt; es entsteht also statt $\frac{3}{4}$ nun $\frac{15}{20}$; von diesem Bruch wird nun der 5te Theil $\frac{3}{20}$ und der 2 malige 5te Theil $\frac{6}{20}$ seyn. Aus dieser Betrach-

 tung

tung, die mündlich noch weiter ausgeführt werden kann, ist die obige Regel entstanden.

§. 79.

Anm. Der Sinn, den man mit diesem Product verbinden muß, ist dieser: Wenn man eine ganze Einheit in 4 Theile getheilt und 3 davon genommen hat, und nun das aus diesen 3 Theilen bestehende Stück wieder in 5 Theile theilt und 2 derselben nimmt, so erhält man eben so viel, als wenn man die vorige Einheit in 20 Theile getheilt, und 6 davon genommen hätte. Z. B. die ganze Einheit sey 1 Centner, ihr 4ter Theil 25 ℔, das 3 fache davon 75 ℔; der 5te Theil von diesen ist 15 ℔; und das doppelte hiervon 30 ℔. Dies ist eben so viel als wenn man vom Centner den 20sten Theil d. i. 5 ℔, 6 mal genommen hätte.

§. 80.

Anm. Der obige Beweis scheint zwar blos für das gegenwärtige Beyspiel geführt worden zu seyn, allein man sieht leicht, daß sich ganz dieselben Schlüsse auch bey allen übrigen Fällen wiederholen lassen; und in sofern ist der Beweis wirklich allgemein. Dies gilt überhaupt von allen Beweisen die auf solche Art geführt werden.

§. 81.

Zus. Wenn einer von beyden Factoren eine ganze Zahl, oder eine ganze Zahl mit einem anhängenden Bruch ist, so kann man sie nach (63, 64) in einen unreinen Bruch verwandeln und dann nach der allgemeinen Regel verfahren. Z. B. $\frac{5}{8}$ mal

mal 4 = $\frac{5}{6}$. $\frac{4}{1}$ = $\frac{20}{6}$ = 3 $\frac{2}{6}$ = 3 $\frac{1}{3}$; oder 2 $\frac{1}{3}$. 3 $\frac{1}{4}$ = $\frac{7}{3}$. $\frac{13}{4}$ = $\frac{91}{12}$ = 7 $\frac{7}{12}$.

§. 82.

Zus. Hieraus ergiebt sich, daß, wenn ein Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren ist, man blos den Zähler desselben damit zu multipliciren hat. Dieses folgt auch schon aus (67); auch ergiebt sich aus eben dem Lehrsatz, daß man blos den Nenner des Bruchs mit der ganzen Zahl dividiren und den Zähler unverändert lassen kann, wenn man den Bruch mit dieser Zahl multipliciren will. Z. B. $\frac{5}{6}$ mal 3 = $\frac{15}{6}$ oder $\frac{5}{2}$ = 2 $\frac{1}{2}$.

§. 83.

Zus. Wenn der Bruch, mit welchem eine ganze Zahl multiplicirt werden soll, zum Zähler 1 hat, so wird es nach geschehener Multiplication anzusehen seyn, als ob die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs dividirt wäre z. B. 6 mal $\frac{1}{3}$ = $\frac{6}{3}$. Es ist also einerley, ob man eine Zahl durch eine andere dividirt, oder sie mit einem Bruche multiplicirt dessen Zähler 1, der Nenner aber die Zahl ist, die den Divisor abgeben sollte.

§. 84.

Lehrs. Jedes Product, wo der Multiplicator ein reiner Bruch war, ist kleiner als der Multiplicand.

Beweis. Wenn der Multiplicand mit einem reinen Bruch multiplicirt wird, so theilt man ihn

vorher in eine Anzahl gleicher Theile und nimmt deren nicht wieder so viel, als sie sämmtlich betragen, folglich wird das was man erhält, weniger als was man vorher hatte. Z. B. 6 . $\frac{2}{3}$ = 4.

§. 85.

Zus. Weil der Multiplicand auch die Stelle des Multiplicators vertreten kann, so wird, wenn dieser eben sowohl wie der Multiplicator, ein reiner Bruch ist, das Product kleiner als jeder der beyden Factoren seyn. Z. B. $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

§. 86.

Anm. Die Multiplication in Brüchen ist also dem Anschein nach eher eine Verminderung als Vermehrung zu nennen; Dies muß aber auch seyn, weil man hier den Multiplicand nicht **mehr** als einmal, sondern **weniger** als einmal nehmen soll. Indessen kann doch auch hier in sofern eine Vermehrung angenommeu werden, als wirklich der zu nehmende Theil des Multiplicands allemal vermehrt wird, wenn nur der Zehler des Multiplicators mehr als 1. ist.

§. 87.

Aufg. **Einen Bruch durch einen andern zu dividiren.**

Aufl. 1) Man kehre den Divisor um und setze den Dividend unverändert darneben.

2) Man multiplicire die obern und auch die untern Zahlen der beyden Brüche, wie bey der Multipli-

Multiplication durch einander; und schreibe die Producte wieder in voriger Ordnung Bruchweise unter einander.

Z. B. der Divisor sey $\frac{2}{3}$ und der Dividend $\frac{4}{5}$, so steht die Rechnung folgendergestalt $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{10} = 1\frac{2}{10} = 1\frac{1}{5}$.

Beweis. Hätten die beyden Brüche einerley Nenner, so würde der eine in dem andern so viel mal enthalten seyn, als der Zähler des einen im Zähler des andern enthalten ist. Z. B. der Divisor wäre $\frac{2}{9}$ und der Dividend $\frac{8}{9}$ so wäre der Quotient $\frac{8}{2} = 4$. Sind nun die Brüche nicht von einerley Benennung, so kann man sie nach (71) dazu bringen, und dies geschieht z. B. bey den obigen Brüchen so: $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ sind $= \frac{5 \cdot 2}{5 \cdot 3}$ und $\frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 5}$; und nun den Zähler des Divisors unter den Zähler des Dividends gesetzt, giebt den Quotienten $\frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 2}$. Der Zähler dieses Quotienten ist also entstanden, indem man den Nenner des Divisors mit dem Zähler des Dividends multiplicirt; und der Nenner des Quotienten ist entstanden, indem man den Zähler des Divisors mit dem Nenner des Dividends multiplicirt. Die obige Auflösung aber enthält eben diese Vorschrift blos abgekürzt.

§. 88.

Anm. Der gefundene Quotient will so viel sagen: Von einem Stück welches zwey Drittel einer Einheit enthält, steckt in einem andern, welches vier

Fünftel einer solchen Einheit enthält, der 10te Theil 12 mal. Z. B. die Einheit sey 1 Stunde, so ist der 3te Theil 20 Min. und 2 Drittel 40 Min. 4 Fünftel einer Stunde sind 48 Min. also steckt der 10te Theil von 40 d. i. 4 Min. in 48 Min. 12 mal; oder die 40 Min. stecken in 48 Min. 1 mal völlig, und der 10te Theil von ihnen überdies noch 2 mal.

§. 89.

Zus. Ist der Divisor oder Dividend eine ganze Zahl, an der auch wohl noch ein reiner Bruch hängt, so giebt man ihr die Gestalt eines unreinen Bruchs (63, 64) und verfährt wie bey reinen Brüchen. Z. B. der Divisor sey 5 der Dividend $\frac{2}{3}$ so schreibt man erstlich $\frac{5}{1}$ und kehrt hernach diesen Bruch um, da dann der Quotient $\frac{2}{15}$ seyn wird. Der Divisor $\frac{3}{4}$, Dividend 6, giebt $\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{1} = \frac{24}{3} = 8$; oder der Divisor $1\frac{2}{3}$, Dividend $2\frac{3}{4}$, so sind diese Zahlen $\frac{5}{3}$ und $\frac{11}{4}$ und der Quotient $= \frac{33}{20} = 1\frac{13}{20}$.

§. 90.

Zus. Wenn also ein Bruch durch eine ganze Zahl soll dividirt werden, so braucht man nur den Nenner des Bruchs mit dieser ganzen Zahl zu multipliciren und den Zähler unverändert beyzubehalten. Dieses, und daß man auch blos den Zähler des Bruchs durch die ganze Zahl dividiren kann, wenn er ein vielfaches von ihr ist, folgt auch aus (67). Z. B. 3 in $\frac{6}{7} = \frac{6}{21}$ oder $\frac{2}{7}$

§. 91.

Zus. Soll aber eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt werden, so wird ebenfalls des Bruchs Nenner damit multiplicirt, hernach aber wird der Bruch umgekehrt. Z. B. $\frac{2}{3}$ in 5 giebt erstlich $\frac{2}{15}$ und dies umgekehrt: $\frac{15}{2}$, den Quotienten.

§. 92.

Lehrs. Wenn der Divisor ein reiner Bruch ist, so wird der Quotient allemal grösser als der Dividend.

Beweis. Wenn der Divisor eine ganze Einheit betrüge, so würde der Quotient, dem Dividend gleich seyn; dies fällt von selbst in die Augen wenn der Dividend eine ganze Zahl ist; ist aber der Dividend ein Bruch, so erhellet es so: Man drücke die den Divisor vorstellende Einheit als einen Bruch aus, der den Nenner des Dividends hat. Z. B. der Dividend sey $\frac{5}{8}$ so setze man $1 = \frac{8}{8}$ und hiermit in $\frac{5}{8}$ dividirt, giebt nach (86) wieder $\frac{5}{8}$. Eben dies erhellet, wenn der Dividend ein uneigentlicher Bruch z. B. $\frac{15}{8}$ wäre. — Ist nun der Divisor ein reiner Bruch, so ist er kleiner als 1, muß also mehr mal im Dividend enthalten seyn als vorhin, da er 1 war, folglich wird sein Quotient mehr als der Dividend betragen müssen.

§. 93.

Anm. Wenn man den Quotienten von einer ganzen Zahl und einem Bruch, oder von zwey Brüchen nach Art der Quotienten bey ganzen Zahlen in (48) ausdrückt, so erhält man Brüche wo 3 oder 4 Zahlen übereinander stehen, oder Zähler und Nenner wieder Brüche sind. Was man sich bey solchen Brüchen gedenken müsse, zeigt Hr. Hofr. Kästner in seiner Arithmetik Kap. 1. 85. bemerkt aber auch dabey, daß ihre Bedeutung verständlicher und sie zur fernern Rechnung bequemer werden, wenn man sie so ausdrückt, daß Zähler und Nenner ganze Zahlen sind. Z. B. $\frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8}$; $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Von den benannten Zahlen.

§. 94.

Statt der bisherigen Eintheilung größerer Einheiten in geringere, wo man blos darauf sah, daß die erforderliche weitere Division geschehen könnte, theilt man die Einheiten von solchen Dingen, welche im gemeinen Leben, Handel und Künsten vorkommen, in eine bestimmte Menge von kleinern Theilen; diesen giebt man eigne Namen, welche nicht von der Theilungsart hergenommen sind, weshalb sie dann auch nicht das Ansehen von Brüchen, sondern von ganzen Zahlen einer niedern Klasse erhalten. Da sie aber im Grunde Brüche von festgesetzten Nennern sind, so hat ihre

Berech-

Berechnung vieles mit der Bruchrechnung gemein. Diese Art der Eintheilung betrift nun Münzen, Gewichte, Maaße, Zeiträume und solche Dinge, die man im besondern Verstande Zahlen nennt. Z. B. Schocke, Mandel ꝛc.

§. 95.

Erklär. Die Rechnung mit solchen Zahlen heißt die mit benannten Zahlen. Sie kommen häufig beym buchhalterischen Rechnungswesen vor, und man hat in praktischen Rechenbüchern und anderwärts, weitläuftige Verzeichnisse, welche die bestimmten Unterabtheilungen mit ihren Namen angeben. Man muß sie also auswendig wissen oder immer bey der Hand haben.

§. 96.

Aufg. Benannte Zahlen von mehreren Unterabtheilungen zu addiren.

Aufl. 1) Man ordne die Posten so zusammen, daß gleichartige Zahlen untereinander kommen und die Theile so auf einander folgen wie es ihre Abstufung erfordert.

2) Man fange das Addiren bey den geringsten Zahlen an, und setze die Summe unter diese Reihe, wenn sie noch nicht so viel Einheiten beträgt, als zu einer einzigen Einheit der nächst höhern Gattung gehören.

3) Wenn die Summe so viel, oder mehr als eine solche Menge von Einheiten beträgt, so dividire

dire man sie durch diese Menge; der Quotien wird anzeigen, wie viel Einheiten der höheren Gattung vorhanden sind, und der etwanige Rest, wie viel noch von den eben addirten übrig bleiben.

4) Den Rest setzt man unter die addirte Reihe, den Quotienten aber nimmt man mit zur folgenden.

Beweis No. 1 und 2 sind nöthig, damit die aus den Summen der geringern Einheiten erhaltenen größern, an den Stellen wo sie hingehören, mituntergebracht werden können. No. 3 hat seinen Grund in (24 und 66). Denn gesetzt man hat 60 Pfen. gefunden, so werden darinn eben so viel Groschen enthalten seyn, als vielmal die Zahl 12 in der 60 enthalten ist. Z. B. man soll addiren.

	13 rthlr.	18 gl.	4 pf.	$1\frac{1}{2}$ hl.
	5 =	22 =	8 =	$\frac{3}{4}$ —
	10 =	16 =	10 =	$1\frac{1}{4}$ —
so ist die Summe	30 rthlr.	9 gl.	11 pf.	$1\frac{1}{2}$ hl.

Beyspiele für die übrigen Sorten nähmen hier zu vielen Raum ein, sie können aber in den Vorlesungen beygebracht werden.

§. 97.

Aufg. Benannte Zahlen von verschiedenen Unterabtheilungen von einander abzuziehen.

Aufl.

Aufl. 1) Man ordne Minuend und Subtrahend so an, wie vorhin die Posten.

2) Man fange die Subtraction bey den geringsten Einheiten an, und wenn deren nicht genug vorhanden seyn sollten, so hole man eine von den nächsthöhern Einheiten herüber, welche hier so viel gelten wird, als man in den (95) erwähnten Verzeichnissen findet. Von diesen und den etwa schon vorhandenen wird sich dann die Subtraktion verrichten lassen.

3) Ist in der nächsthöhern Stelle keine Einheit vorhanden, so gehe man immer weiter bis man eine antrift; diese verwandelt man zuerst in Einheiten der nächstniedrigern Stelle, nimmt von diesen eine und trägt sie auf ähnliche Art immer weiter fort, bis man in diejenige kommt, wo das Abziehen nicht geschehen konnte. Es versteht sich, daß die Zahl, von welcher man eine 1 geholt hat, Eins weniger gilt.

Beweis. Man kann den für die vorige Aufgabe gegebenen Beweis leicht auch auf die gegenwärtige anwenden. Z. B.

der Minuend sey	6. Ctnr.	10. ℔.	0. Loth.	1 Qntl.
der Subtrahend	4 "	12 "	18 "	3 "
Die Differenz	1 "	97 "	13 "	2 Qutl.

Hier kann man 3 Qtl. von 1 nicht abziehen, also holt man 1 Loth, da aber vor der Hand keine

Lothe

Lothe vorhanden sind, so nimmt man von den 10 Pfunden eines und legt es in die Stelle der Lothe, wo es 32 giebt; von diesen 32 legt man dann 1 in die Stelle der Qtl. so werden hier 5 entstehen; bey den Lothen werden noch 31 liegen bleiben, und statt 10 ℔ wird man nur 9 haben.

§. 98.

Zus. Auf diese Art kann man aus dem Anfang und Ende einer Begebenheit, ihre Dauer, z. B. das Alter eines Menschen berechnen. Es ist Jemand gebohren 1751 den 27 Jun. früh $\frac{3}{4}$ auf 4 Uhr; wie alt ist er 1791 den 30sten April Nachm. halb 3 U? So sind vom Anfang unserer Zeitrechnung bis auf den Punkt für welchen man das Alter wissen will, verflossen

	1790 J.	3 M.	29 T.	14 St.	30 M.
und bis auf den Zeitpunkt der Geburt	1750 "	5 "	26 "	3 "	45 "
also das Alter =	39 "	10 "	3 "	10 "	45 "

Wenn ein Monat geborgt werden muß, so rechnet man für denselben so viel Tage als derjenige hat, in welchem der Anfang der Begebenheit, z. B. der Geburtstag fällt.

§. 99.

Anm. Wenn geborgt wird, so verwandelt man Eine höhere Einheit in die nächst geringere z. B. 1 Tag in 24 Stunden. Sollten nun mehrere

höhere

höhere Einheiten in geringere z. B. 8 Tage in Stunden verwandelt werden, so wird man ohne Zweifel 8 mal 24 Stunden erhalten. Dies Verfahren kommt häufig vor und wird insgemein die absteigende Reduktion genannt. Die allgemeine Regel hiezu wäre folgende: man multiplicirt die Anzahl der zu reducirenden Einheiten mit der Zahl, welche anzeigt, wie viel Einheiten der geringern Gattung auf eine einzige der hohern gehen. Die aufsteigende Reduction geschieht durch das dividiren, und das Verfahren ist bereits in (95 no. 3) mit angezeigt worden.

§. 100.

Aufg. Benannte Zahlen von verschiedenen Gattungen zu multipliciren.

Aufl. 1) Man fange bey der geringsten an die Ziffern wie unbenannte Zahlen zu multipliciren, und gebe dem Product wieder den Namen des Multiplicands.

2) Wenn dieses Product so groß ist, daß es eine oder mehrere Einheiten von der höhern Gattung enthält, so reducire man es dazu.

3) Man multiplicire dann auch die höhern Gattungen und addire zum Product die nach voriger Nummer etwa erhaltenen Einheiten.

Beweis. Da der Multiplicator durch seine Einheiten blos angiebt wie vielmal der Multiplicand zu sich selbst gesetzt werden soll, so kann er niemals eine benannte Zahl seyn. Z. B. 3 rthlr.

mit 2 rthlr. zu multipliciren gäbe gar keinen Sinn. Es wird also das Product als ein vielfaches vom Multiplicand, wieder den Namen desselben erhalten müssen. Mit den Reductionen hat es dieselbe Bewandniß, wie bey der Addition. Z. B.

	3 Fuder	10 Eymer	20 Kannen
multiplicirt mit			5
	19 ⸗	4 ⸗	20 K.

Bekanntlich hat 1 Fuder 12 Eymer, und 1 Eymer 40 Kannen.

§. 101.

Anm. Wenn der Multiplicator eine etwas große Zahl ist, so wird dieses multipliciren sehr beschwerlich; man zerfället ihn deshalb entweder in Factoren und verfährt wie in (38), oder wenn dies nicht angeht, bringt man alle Theile des Multiplicands nach (98) zur kleinsten Gattung, multiplicirt alsdann diese Zahl mit dem Multiplicator und verwandelt das Product wieder durch die aufsteigende Reduction in die höhern Gattungen.

§. 102.

Aufg. Benannte Zahlen von verschiedenen Gattungen mit einer unbenannten zu dividiren.

Aufl. 1) Man dividire den Divisor in alle Theile des Dividends und fange bey der höchsten Gattung an.

2) Wenn

2) Wenn bey einer höhern Gattung ein Rest bleibt, so reducire man ihn zur niedrigern und nehme die Einheiten welche etwa schon in der Stelle der niedrigern stehen, mit dazu.

3) Man gebe den Theilen des Quotienten wieder dieselben Namen, welche der Dividend gehabt hat.

Beweis. Der für die vorige Aufgabe läßt sich leicht auch auf die gegenwärtige anwenden.

```
Divisor   Dividend
   5 | 19 Fud.  4 Ey. 20 K. | 3 Fud. 10 Ey. 20 K.
     | 15    =  48 Ey.      |
     ---       -----
       4        52
                50   =   80
               ----    -----
                 2      100
                        100
                       -----
                          0
```

§. 103.

Anm. Da man mit jedem Quotienten in den Dividend dividiren kann, und alsdann den vorigen Divisor zum Quotienten erhält, so wird hier sowohl Dividend als Divisor aus benannten Zahlen und selbst aus solchen, die von mehrern Gattungen sind, bestehen können, der Quotient wird aber alsdann eine unbenannte Zahl seyn welche nemlich anzeigt, wie vielraal man den benannten Divisor aus dem eben so benannten Dividend wegnehmen könne. Beyspiele dieser leztern Art kommen aber weit seltner vor als die der erstern. Die Verfahrungsart ist übrigens so: man sehe wie

vielmal die höchste Gattung des Divisors in de
höchsten des Dividends enthalten ist und nehm
an, daß alsdann auch der ganze Divisor wenig
stens in dem Theil des Dividends so vielmal ent
halten sey, der Glieder von einerley Namen mi
den im Divisor befindlichen, hat. Zu mehrere
Sicherheit multiplicirt man mit der Ziffer de
Quotienten alle Theile des Divisors und zieht di
respectiven Theile des Products von den in
Dividend stehenden Gliedern ab. Z. B.

3 Fud. 10 Ey. 20 K.	19 Fud.	4 Ey.	20 K.	5
	19 "	4 "	20 —	
		0.		

§. 104.

Anm. Ist der Divisor eine unbenannte, aber etwa große Zahl, so zerfälle man ihn in Factoren wen es angeht, und dividire, wie in (101) gelehr worden. Er sey 15, und der Dividend 70 Balle 8 Rieß 12 Buch und 16 Bogen Papier so ver fährt man auf folgende Art.

15 = 3 ×	70 B.	8 R.	12 Bch.	16 Bg.
5	23 "	6 "	4 "	$5\frac{1}{3}$
	4 "	7 "	4 "	$20\frac{4}{15}$

Weil hier allemal kleine Reste bleiben, so setz man die Quotienten sogleich unter die Theil des Dividends und reducirt auch die Reste gleic in Gedanken zur niedrigern Gattung. Inder man gegen das Ende mit der 5 in die Bogen deren mit dem zuvorgebliebenen reducirten Re 101 werden, dividiren soll, bekommt man zur Quotienten 20 und 1 bleibt übrig, diesen ver wandeln

wandelt man, wegen des anhängenden Bruchs in 3 Drittel und den anhangenden Drittel dazu, giebt $\frac{4}{3}$ diesem dann mit 5 dividirt, oder den Nenner blos mit 5 multiplicirt, giebt $\frac{4}{15}$.

§. 105.

Anm. Man kann auch hier alle Glieder des Dividends durch die absteigende Reduction zur niedrigsten Gattung bringen; und mit dem Divisor dividiren. Ist nun dieser eine unbenannte Zahl so wird der Quotient wieder durch die aufsteigende Reduction in höhere Einheiten verwandelt. Besteht er hingegen aus benannten Zahlen, so muß er vorher zu eben solchen Einheiten wie der Dividend reducirt werden, und der Quotient, bedarf als unbenannte Zahl, sodann keiner weitern Reduction.

Von den entgegengesetzten Größen.

§. 106.

Bisher sind die Größen blos in sofern betrachtet worden, als sie eine gewisse Menge von Einheiten dieser oder jener Art enthielten. Da es aber Größen giebt die von einem Punkt aus nach völlig einander entgegengesetzten Seiten wachsen können, so muß man die Werthe die sie auf der einen Seite haben, von denen unterscheiden, die ihnen auf der andern eigen sind. Dies giebt Veranlassung, jede Größe in einer gewissen, sich auf den Begriff des Entgegengesetzten beziehenden Rücksicht zu betrachten. Z. B. wenn man eine Summe Geldes betrachtet, so kann man sich dieselbe so:

wohl als das Vermögen, oder auch als die Schuld eines Menschen gedenken. Eben so eine Länge von 10 Ellen kann angesehen werden, als ob sie sich von einem Punkt nach der Höhe, oder von eben-demselben nach der Tiefe; von ihm nach der rechten, oder nach der linken Seite erstreckte. Vermögen und Schulden; Höhe und Tiefe; Rechte und Links u. s. w. sind Etwas das man einander entgegengesetzt nennt. Es liegt nun in der Natur des Entgegengesetzten, daß wenn es in gleichen Maasse beysammen gedacht wird, es sich selbst vernichtet und im ungleichen Maas sich wenigstens allemal vermindert. Eben so viel Vermögen als Schulden zusammen gedacht, führen auf den Begriff der absoluten Armuth. Wenn Jemand au einem Floß in eben der Zeit 10 Ellen weit den Strom entgegen geht, als das Floß vom Strom 10 Ellen weit abwärts geführt wird, so hat er im absoluten Raum oder in Rücksicht eines Gegenstandes am Ufer sich nicht von der Stelle bewegt Hat aber Jemand bey 10 Rthlr. Vermögen auch 6 Rthlr. Schulden, so ist er zwar nicht absolut arm aber doch auch nicht so reich als wenn er di 6 Rthlr. Schulden nicht zugleich mit seinen 10 Thalern Vermögen hätte. Diese Betrachtungen werden hinreichen, das Folgende richtig zu verstehen

§. 107.

Erklär. **Entgegengesetzte Größen** sind solch gleichartige, die einander wechselseitig vermindern wenn man sie einer Vereinigung betrachtet.

Zus

§. 108.

Zus. Nichtentgegengesetzte Größen werden also einander allemal bey einer solchen Vereinigung vermehren, dies ist auch völlig dem gemäs, was (Einl. 2 und 3) gesagt worden ist.

§. 109.

Grunds. Wenn eine entgegengesetzte Größe so verändert wird, daß sie nach und nach bis auf Nichts abnimmt, so erhält sie, wenn die vorige Veränderung immer gleichförmig fortgeht, nach der Vernichtung einen dem vorigen entgegengesetzten Werth, und die vorige Abnahme verwandelt sich nun in eine Zunahme.

§. 110.

Zus. In wiefern also die Veränderung nach der Abnahme bis auf Nichts noch immer weiter fortgegangen ist, kann man sagen, die zur entgegengesetzten Größe gewordene sey kleiner als Nichts; sie enthält nemlich weniger als Nichts von der entgegengesetzten. In wiefern sie aber nach dem Uebergang durch das Nichts gewachsen ist, ist sie mehr als Nichts und folglich noch immer eine wirkliche Größe, nur nicht mehr zur vorigen Klasse gehörig. Z. B. es hat Jemand 10 Rthlr. er zehrt davon bis er alles ausgegeben hat; zehrt er nun noch weiter fort, so geräth er in Schulden, die immer größer werden, je länger das Fortzehren dauert. Dieses Zehren also kann eben sowohl Verminderung des Vermögens als Vermehrung der Schuld verursachen. Wer 10 Rthlr. bezahlen soll,

hat als Schuld Etwas, aber als Vermögen weniger als Nichts. Das Nichts also wovon hier die Rede ist, muß als ein relatives, nicht aber als ein absolutes betrachtet werden.

§. 111.

Willk. Satz. Von entgegengesetzten Größen bezeichnet man die der einen Klasse mit + und die der entgegengesetzten mit —. Das erstere Zeichen spricht man gewöhnlich durch plus und das letztere durch minus aus. Gemeiniglich giebt man das erstere Zeichen solchen, die bey irgend einer Betrachtung zuerst vorkommen, oder durch eine Zusammensetzung mehrerer Einheiten entstanden sind, weshalb sie auch positive oder bejahende heißen; für die letztern hingegen schickt sich das Zeichen der Subtraction in sofern, als man sich nach 109) vorstellen kann, daß sie aus einer bis über die Vernichtung hinausgegangenen Verminderung der positiven entstanden wären, deshalb heisen sie auch fehlende oder negative. Einer bejahenden Größe die in einem Satze zuerst steht, pflegt man gewöhnlich gar kein Zeichen vorzusetzen. Z. B. statt + 3 — 2 setzt man 3 — 2.

Entgegengesetzte Größen welche bey ihrer sonstigen Gleichartigkeit auch einerley Zeichen haben, können eben so zusammengesetzt und von einander abgezogen werden, als oben die absoluten; sobald sie aber verschiedene Zeichen haben, sind sie nicht mehr ganz gleichartig und ihre Addition ist mehr eine Abrechnung, als eine Zusammenhäufung zu nennen.

Aufg.

§. 112.

Aufg. Entgegengesetzte Größen mit verschiedenen Zeichen, zu addiren.

Aufl. Man nehme die kleinere von der größern hinweg und setze vor den Rest wieder das Zeichen der größern, so wird dieser die Summe vorstellen z. B.

+ 8	− 8
− 3	+ 3
+ 5	− 5

Beweis. Man theile die größere in 2 Theile so, daß der eine Theil so viel Einheiten hat als die kleinere Größe, so geben die beyden gleichen und entgegengesetzten Größen nach 106 zusammen Null und es bleibt deshalb der andere Theil der größern nur noch allein übrig.

§. 113.

Anm. Hat man mehrere bejahende und verneinende Größen so addirt man erstlich alle bejahende und alle verneinende besonders und vergleicht am Ende noch die beyderley Summen nach (112) z. B. + 3 − 4 − 2 + 5 + 7 − 9 + 8. so setzt man:

+ 3	− 4	und nun.	+ 23
+ 5	− 2		− 15
+ 7	− 9		+ 8
+ 8	− 15		
+ 23			

§. 114.

Lehrs. Eine als entgegengesetzte Größe betrachtete von einer andern abziehen, ist eben so viel als die entgegengesetzte von jener zuerstgenannten zur letztern addiren.

Beweis. Nach (111) sind Addition und Subtraktion einander auf eben die Art entgegengesetzt wie bejahende und verneinende Größen, verwechselt man also mit der Natur der Größe auch zugleich die Natur der vorzunehmenden Rechnungsart, so wird der erstere Fehler durch den letztern wieder aufgehoben. Z. B. jemanden 10 Rthlr. von seinem Vermögen nehmen, oder ihm eine Schuld von 10 Rthlr. aufwältzen; ist einerley. Eben so auch Jemanden eine Schuld von 10 Rthlr. abnehmen ist so gut als sein Vermögen um 10 Rthlr. vergrössern.

§. 115.

Aufg. Entgegengesetzte Größen von einander zu subtrahiren.

Aufl Man verwandle das Zeichen derjenigen die man abziehen soll, in das entgegengesetzte und addire sie hernach. Z. B.

$$\begin{array}{r} +\ 8 \\ -\ 3 \\ (+) \\ \hline +\ 11 \end{array}$$

Beweis. Er folgt unmittelbar aus dem vorigen Lehrsatz.

§. 116.

Anm. Dies ist die kürzeste Art zum Zweck zu gelangen; will man indessen eigne Regeln für diese Subtraktion haben, so lassen sie sich folgendergestalt für die verschiedenen Fälle entwickeln.

I. Fall

I. Fall. Die Größen haben einerley Zeichen und die obere ist grösser als die untere. Hier werden die entgegengesetzten Größen eben so wie oben (28) die absoluten behandelt, sie behalten immer ihr Zeichen bey sich.

II. Fall. Die Zeichen sind zwar überein, aber der Minuend ist kleiner als der Subtrahend. Z. B. Min. $= + 5$; Subtr. $= + 8$

Man drücke den Minuend so aus: $+ 5 + 3 - 3$
und den Subtrahend zerlege man
in die beyden Theile . . $+ 5 + 3$
so wird bleiben $- 3$

oder: Min. $= - 5$; Subtr. $= - 8$.

so schreibe man $- 5 - 3 + 3$
und 8 zerlege man in $- 5 - 3$
so bleibt $+ 3$

Hieraus ergiebt sich die Regel: man ziehe den Minuend vom Subtrahend ab und setze vor den Rest das entgegengesetzte Zeichen.

III. Fall. Wenn Minuend und Subtrahend verschiedene Zeichen haben. Z. B. Min. $= + 8$; Subtr. $= - 5$. Man drücke den Minuend
so aus: $- 5 + 5 + 8$
und den Subtrah.
lasse man $- 5$
so bleibt $+ 5 + 8 = + 13$

oder

oder Min. $= -8$; Subtr. $= +5$; man setze

$$\begin{array}{lrl} \text{Min.} & -8 & = +5-5-8 \\ \text{Subtrah.} & & = +5 \\ \hline \text{so bleibt} & & -5-8=-13 \end{array}$$

Hieraus ergiebt sich die Regel: Man addire die Größen und setze vor die scheinbare Summe das Zeichen des Minuends, so hat man die wahre Differenz.

In den gebrauchten Beyspielen war die Zahl der Einheiten im Minuend grösser als im Subtrahend; da aber mit den Größen allemal eine Addition vorgenommen wird, so kann es nichts ausmachen, wenn sie kleiner als im Subtrahend ist.

IV. Fall. Wenn der Minuend o ist, und der Subtr. z. B. $= +5$; Man drücke den Minuend

$$\begin{array}{ll} \text{so aus:} & +5-5 \\ \text{Subtrahend} & +5 \\ \hline \text{Rest} & -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} \text{oder: Es sey wieder o} & = & +5-5 \\ \text{und der Subtr.} & = & \quad\;\; -5 \\ \hline \text{Rest} & = & +5 \end{array}$$

Die Regel ist also: Man setze den Subtrahend mit entgegengesetzten Zeichen unter die Größen, so hat man den Rest.

Ist der Subtrahend o, so hat gar kein Abzug statt und der Minuend ist mit dem Rest völlig einerley.

§. 117.

§. 117.

Zus. Man kann allemal die Größen welche den Subtrahend vorstellen, rechts hinter die Größen des Minuends in einer Reihe fortschreiben, dieses ansetzen ist aber eine wirkliche Addition, also muß es auf die Art geschehen, daß zugleich alle Zeichen des Subtrahends in ihre entgegengesetzten verwandelt werden. Z. B. Min. $+ 3 + 4$

Subtr. $+ 8 - 6$

Diff. $- 5 + 10 = + 5$

oder: $+ 3 + 4 - 8 + 6 = + 5$.

§. 118.

Aufg. Größen mit entgegengesetzten Zeichen in einander zu multipliciren.

Aufl. Man multiplicire die Größen wie in (40) und wenn beyde Factoren einerley Zeichen haben, so setze man vor das Product $+$, wenn sie aber verschiedene haben, $-$.

Beweis. Nach (36) kann man das verlangte Product als eine Zahl ansehen, welche aus dem einen der beyden Factoren eben so entsteht, wie der andere aus der Einheit (die man durchaus als bejaht ansehen kann) entstanden ist. Nun hat man überhaupt vier Fälle, nemlich die Factoren sind entweder 1) beyde bejahend, oder 2) beyde verneinend; oder 3) der obere bejahend und der untere verneinend, oder 4) umgekehrt.

I. Fall.

I. Fall. Der eine Factor sey z. B. + 3 der andere + 2 so entsteht + 3 aus der positiven Einheit, indem man sie dreymal hinsetzt und addirt, also wird auch das Product entstehen, wenn man + 2 dreymal hinsetzt und addirt; es wird also + 6 seyn.

II. Fall. Der eine Factor sey — 3 und der andere — 2 so entsteht — 3 indem man das Entgegengesetzte der + 1 d. i. die — 1 dreymal hinsetzt und addirt; also wird auch das Product entstehen, wenn man das Entgegengesetzte der — 2 d. i. + 2, dreymal hinsetzt und addirt; es wird also hier wieder + 6 seyn.

III. Fall. Der eine Factor sey + 3 der andere — 2 so entsteht + 3, wenn die positive Einheit dreymal genommen und addirt wird; also wird das Product entstehen wenn der andere Factor — 2 dreymal genommen und addirt wird; es ist also = — 6.

IV. Fall. Da es erlaubt ist die Factoren zu verwechseln (37), so ist dieser Fall mit dem vorigen einerley; indessen läßt er sich auch leicht besonders beweisen. Es sey der eine Factor — 3 der andere + 2, so entsteht — 3 aus der + 1, wenn man ihr Entgegengesetztes dreymal nimmt und addirt, also wird das Product entstehen, wenn man das Entgegengesetzte der + 2 drey mal nimmt und addirt, folglich wieder — 6 werden.

Wegen des Umstandes, daß man die Einheit bejahend annimmt, s. m. Kästn. Arithm. Kap. 1. §. 101.

§. 119.

Aufg. Entgegengesetzte Größen zu dividiren.

Auflös. Man dividire sie wie in (43) und gebe dem Quotienten das Zeichen + wenn Divisor und Dividend einerley, — aber, wenn sie verschiedene Zeichen haben. Z. B. + 3 | + 12 | + 4; — 3 | — 12 | + 4; + 3 | — 12 | — 4; — 3 | + 12 | — 4.

Beweis. Nach (42) erhält man den richtigen Quotienten, wenn er mit dem Divisor multiplicirt, den Dividend giebt; ist nun z. B. der Divisor verneinend und der Dividend bejahend, so muß der Quotient nothwendig verneinend werden, sonst könnte er mit dem verneinenden Divisor multiplicirt, nicht ein bejahendes Product geben. Eben dieser Schluß läßt sich auch auf die drey übrigen Fälle anwenden. Uebrigens könnte man auch den Beweis für jeden Fall, ganz auf die Art wie vorhin bey der Multiplication, führen.

§. 120.

Zus. Da jeder Bruch als ein Quotient anzusehen ist, von welchem der Zehler den Dividend und der Nenner den Divisor vorstellt, so wird jeder Bruch bejahend, wenn entweder sein Zähler und Nenner beyde bejahend, oder beyde verneinend sind; und verneinend wird er seyn, wenn

von

von Zähler und Nenner der eine bejahend und der andere verneinend ist. z. B.

$$\frac{+3}{+4} = +\frac{3}{4}, \frac{-3}{-4} = +\frac{3}{4}, \frac{+3}{-4} = -\frac{3}{4} \text{ etc.}$$

Von der Buchstabenrechnung.

§. 121.

Größen bey welchen es nicht auf eine bestimmte Menge von Einheiten oder Theile derselben ankommt, sondern welche blos in Rücksicht einer gewissen an sich habenden Eigenschaft in der Rechnung gebraucht werden sollen, drückt man nicht mehr durch eine Ziffer, sondern um der Allgemeinheit willen, durch ein anderes Zeichen aus. Indessen legt man doch immer solchen allgemeinen Zeichen bestimmte Ziffern unter, wenn man von den Resultaten der Rechnung Gebrauch machen will, wie solches aus der Folge deutlicher erhellen wird.

§. 122.

Willk. Satz. Zum Zeichen einer allgemeinen Größe bedient man sich eines Buchstabens, z. B. die Länge eines gewissen Weges heisse = a und die eines andern = b so ist die Summa dieser zwey Wege = a + b die man wieder durch einen einzigen Buchstaben z. B. f, ausdrücken könnte. Der Unterschied zwischen diesen beyden Wegen wäre

wäre a — b welchen man ebenfalls wieder durch den einzigen Buchstaben z. B. d, ausdrücken könnte; und dieses d würde eine bejahende Größe seyn, wenn a größer als b, und beyde bejahend gewesen wären; hingegen verneinend, wenn unter voriger Voraussetzung b > a gewesen wäre. Das Product von zwey Buchstaben drückt man dadurch aus, daß man sie ohne weiteres Zeichen blos neben einander setzt, z. B. das Maas einer Sache, welches überhaupt durch m vorgestellt würde, sollte mehrmal genommen werden und die Zahl welche anzeigt wie vielmal es geschehen soll, wäre durch n ausgedrückt, so würde das ganze Product seyn: n m. Wäre die Zahl, womit multiplicirt werden sollte auch = m, so würde das Product eine Potenz vom m seyn und so ausgedrückt werden können: $m^2 = m\,m$ (35). Wenn eine Größe durch die andere soll dividirt werden, so drückt man den Quotienten eben so aus, wie in (48) ist bemerkt worden z. B. $\frac{p}{q}$ oder p : q.

§. 123.

Zus. Der Allgemeinheit wegen kann jeder Buchstabe alle Arten von Zahlen, ganze, gebrochne und solche die erst noch in der Folge vorkommen werden, bedeuten, und in so fern sagt man, daß a + b der allgemeine Ausdruck für jede Summe; der a — b für alle Differenzen, a b für alle Producte und $\frac{a}{b}$ für alle Quotienten oder Brüche wäre. Sobald nun z. B. a den Werth von 5 Rthlr. und

b den Werth von 3 Rthlr. hätte, so wäre a + b = 8 rthlr. u. s. w.

§. 124.

Anm. Durch besondere Umstände kann indessen jene Willkühr zuweilen etwas eingeschränkt werden. Z. B. man wollte eine allgemeine Vorstellung von einer **geraden** Zahl geben, so wäre sie nach (34) eine solche die 2 zum Factor hätte, da nun der andere Factor eine ganze Zahl seyn muß, wenn sein zweyfaches eine solche seyn soll, so läßt sich im allgemeinen die gerade Zahl durch den Ausdruck 2 m darstellen, und m kann eine Zahl bedeuten was es für eine will, nur muß es unter diesen Umständen eine **ganze** seyn; eben so würde der Ausdruck: 2 m + 1 jede ungerade Zahl andeuten.

§. 125.

Zus. Wenn ein und dieselbe Größe bey einerley Rechnung mehrmal vorkommt, so drückt man sie nicht durch einen neuen Buchstaben aus, sondern man behält wieder den vorigen für sie, drückt auch die Mehrheit nicht nach Art der Addition, sondern nach Art der Multiplikation aus z. B. a + a + a = 3 a, und wenn zu a + a + a noch a + a kommen sollte, so hätte man 3 a + 2 a = 5 a und 5 a − 3 a = 2 a.

§. 126.

Erklär. Die Größe die vor einem Buchstaben steht und anzeigt, wie vielmal er zu nehmen sey, z. B. im leztern Beyspiel die 3, heißt der Coeffi-

cient von dem Buchstaben und ein solcher Coeffi- cient kann zuweilen selbst ein Buchstabe seyn.

§. 127.

Zus. Wenn Größen die durch einerley Buchstaben ausgedrückt sind, zusammen addirt oder von einander subtrahirt werden sollen, so wird die Addition oder Subtraction blos mit ihren Coefficienten vorgenommen, und nachdem wegen des Zeichens das beobachtet worden, was in (113, 115) vorgeschrieben ist, wird zur Summe oder Differenz wieder der gemeinschaftliche Buchstabe gesetzt. Es haben aber alle Größen ihre Coefficienten, und wenn ein Buchstabe allein steht, so ist es anzusehen als ob sein Coefficient 1 wäre.

§. 128.

Aufg. Buchstaben mit Coefficienten und Zeichen zu addiren und zu subtrahiren.

Aufl. 1) Man setze diejenigen unter einander die gleichartig sind d. i. die einerley Buchstaben haben.

2) Man addire oder subtrahire die Coefficienten nach (113, 115).

3) Man setze den gemeinschaftlichen Buchstaben wieder dazu. Beyspiel zur Addition

$$\begin{array}{rl} & +3a-5b-c+2f-g \\ & +5a+b-6c-f+h \\ \hline \text{Summe} & +8a-4b-7c+f-g+h \end{array}$$

Zieht man von der Summe eine der beyden Posten ab, so hat man ein Beyspiel zur Subtraction und zugleich eine Probe der Rechnung. Neml.

	+ 8 a	− 4 b	− 7 c	+ f	− g	+ h
	+ 5 a	+ b	− 6 c	− f		+ h
Rest	+ 3 a	− 5 b	− c	+ 2 f	− g	

Beweis. Er folgt unmittelbar aus dem vorigen Satz und aus (113, 115).

§. 129.

Anm. Zur Erläuterung kann man sich statt, a, b, ꝛc benannte Zahlen (95) gedenken und, wenn es angeht, alle Theile bejahend ausdrücken. Z. B. Es bedeute a Centner, b Pfunde, c Lothe, f Quentchen, g Pfenniggew. h Hellergew. so hat man:

2 Ctr.	94 ℔	31 Lth.	1 Qutl.	3 Pfgew.	
5 Ctr.	0 ℔	25 Lth.	3 Qutl.	0 Pfgew.	1 Hlgew
7 Ctr.	95 ℔	25 Lth.	0 Qutl.	3 Pfgew.	1 Hlgew

§. 130.

Anm. Wäre der Minuend = + 6 m − 3 n
der Subtrahend + 5 p − 2 q
so kann man die Differenz nach (117) gleich so ausdrücken + 6 m − 3 n − 5 p + 2 q

§. 131.

Aufg. Buchstabengrößen mit Coefficienten und Zeichen in einander zu multipliciren.

Aufl.

Aufl. 1) Man multiplicire jedes Glied des Multiplicands mit jedem des Multiplicators so, daß man die Buchstaben nach (122) blos neben einander setzt, die aus Ziffern bestehenden Coefficienten aber nach dem Einmaleins multiplicirt und das Product links neben das Product der Buchstaben setzt.

2) Das Zeichen bestimme man nach (118).

3) Die einzelnen Producte die sich addiren lassen, addire man nach (128).

Beweis. Nach (125) stellt schon jeder Buchstabe mit seinem Coefficienten ein Product aus 2 Factoren vor; also könnte man beyde Factoren abermals neben einander setzen um das Product, welches sie geben, auszudrücken. Da es nun nach (37) gleich viel ist, in welcher Ordnung die Factoren eines Products neben einander stehen, so kann man die Factoren welche die Coefficienten vorstellen, besonders, und die Buchstaben auch besonders neben einander setzen; und wenn die Coefficienten aus Ziffern bestehen, solche nach dem Einmaleins in einander multipliciren z. B.

$$\begin{array}{rrrr}
 & +a & +b & \\
 & +a & -b & \\
\hline
 & -ab & -bb & \\
+aa & +ab & & \\
\hline
+aa & - & bb & \text{oder: } a^2 - b^2
\end{array}$$

Oder:

(3 a — 2 b) . (2 a + 4 b) wird so multiplicirt:

$$\begin{array}{r} +3a-2b \\ +2a+4b \\ \hline +12ab-8bb \\ +6aa-4ab \quad\quad \\ \hline +6aa+8ab-8bb \end{array}$$

oder:

$$\begin{array}{r} +3f-g \\ -2h+3 \\ \hline +9f-3g \\ -6hf+2hg \quad\quad \\ \hline -6hf+9f+2hg-3g \end{array}$$

§. 132.

Anm. In den beyden letztern Gliedern stellt g allein den gemeinschaftlichen Buchstaben vor und die Coefficienten sind — 3 und + 2 h, also kann man im Product setzen: + (2 h — 3) g Eben so statt der beyden erstern Glieder: + (9 — 6 h) f. Auch die Summe od. Diff. der beyden Glieder: — 6 h f + 2 h g kann man so ausdrücken, daß man ihren gemeinschaftlichen Factor oder Buchstaben nur einmal setzt, neml. + (2 g — 6 f) h. Das Einklammern ist allemal nöthig, wenn man anzeigen will, daß mehrere durch + oder — getrennte Glieder als etwas zusammen gehöriges Ganzes angesehen werden sollen; so sind z. B. 2 h — 3 der ganze zu g gehörige Coefficient. Ausdrücke von der Art kommen sehr häufig vor, und gewähren oft den Vortheil beym Calculiren, die unbekannte Größe von den bekannten,

kannten, womit sie vermischt ist, abzusondern. Gesetzt es käme der Ausdruck vor l — l k so kann man sich vorstellen, daß er so aussehe 1. l — k l und nun l als gemeinschaftlichen Buchstaben nur einmal setzen: neml. (1 — k) l. oder:

$$\begin{array}{l} p - q\,s \text{ multiplicirt mit} \\ \quad + t\,s \text{ giebt zum Product} \\ \hline p\,t\,s - q\,t\,s\,s = (p - q\,s)\,t\,s \end{array}$$

§. 133.

Anm. Wenn man hier solche Erläuterungen durch Ziffern, wie in (129) zu haben wünscht, so darf man für die Buchstaben keine benannten Zahlen setzen, weil man nach (100) mit solchen nicht multipliciren kann. unbenannte aber lassen sich brauchen. Z. B. wenn a = 10; b = 5; c = 1, so ist 3 a — 4 b + c = 11 u. s. w. Eben diese Bemerkung gilt auch zum Theil für die Division.

§. 134.

Aufg. Größen dergleichen in voriger Aufgabe betrachtet worden sind, in einander zu dividiren.

Aufl. 1) Man dividire zuerst die Coefficienten nach (43), und darnach auch die Buchstaben durch einander. Letzteres geschieht so, daß man nach (48) den Quotienten wie einen Bruch schreibt; kommen aber im Dividend und Divisor einerley Buchstaben vor, so streicht man in Gedanken diejenigen, welche im Divisor stehen aus denen im

Dividend, hinweg, und die nun noch stehenbleibenden geben den Quotienten. Die Zeichen werden nach (119) bestimmt. Z. B. $+3a|+12ab|$ $+4b$; oder $-4|-8c|+2c$; oder $d|6de|6e$; oder $+mn|-smpnq|-spq$; oder $-3x|$ $+abx|-\frac{1}{3}ab$; oder $+3f|-2gh|-\frac{2gh}{3f}$

2) Wenn der Divisor nur aus Einem Gliede besteht, der Dividend aber aus mehreren, so verfahre man mit jedem Gliede des Dividends so, wie in No. I. gelehrt worden. Z. B.

$$+3v|+9vw-6vx+2z|+3w-2x+\frac{2z}{3v}$$

3) Wenn Divisor und Dividend aus mehreren Gliedern bestehen, so ordne man in beyden die Glieder so, daß die Buchstaben in einerley Ordnung auf einander folgen, dividire alsdann das erste Glied des Dividends durch das erste des Divisors, multiplicire mit dem Quotienten alle Glieder des Divisors und ziehe sie von den Gliedern des Dividends ab, wo dieses nicht unmittelbar angeht, setze man nach (116, IV.) das abzuziehende Product mit entgegengesetzten Zeichen als Rest hin, und fahre mit dieser Arbeit so lange fort, bis nichts mehr im Dividend vorhanden ist. Z. B.

$$\begin{array}{r|l|l} 2a+4b & 6aa+\ \ 8ab-8bb & 3a-2b \\ & 6aa+12ab & \\ \hline & \ \ 0-\ \ 4ab-8bb & \\ & -\ \ 4ab-8bb & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

oder

oder:

$$
\begin{array}{r|l|l}
3a - 2b & 6aa + 8ab - 8bb & 2a + 4b \\
 & 6aa - 4ab & \\
\hline
 & 0 + 12ab - 8bb & \\
 & + 12ab - 8bb & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

oder:

$$
\begin{array}{r|l|l}
a + b & aa - bb & a - b \\
 & aa + ab & \\
\hline
 & 0 - ab - bb & \\
 & - ab - bb & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

oder:

$$
\begin{array}{r|l|l}
1 - x & 1 & 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1 - x} \\
 & 1 - x & \\
\hline
 & 0 + x & \\
 & + x - xx & \\
\hline
 & 0 + xx & \\
 & + xx - xxx & \\
\hline
 & + xxx &
\end{array}
$$

An diesem letztern Beyspiel sieht man, daß die Division ohne Ende fortgehen und lauter Potenzen von x enthalten wird. Der Dividend ist in solchen Fällen kein Product aus dem Divisor in eine endliche Menge solcher Glieder, dergleichen die drey ersten des Quotienten sind. Man sucht also von ihnen so viel als man will und hängt, um den Quotienten vollständig zu machen, am Ende noch einen Bruch an, dessen Zähler der jedesmalige letzte Rest und der Nenner der Divisor ist.

Diesen angehängten Bruch nennt man die Ergänzung und die unbestimmte Menge der zu findenden Glieder, eine unendliche Reihe. Es ist wichtig auf diese Ergänzung Rücksicht zu nehmen, weil man sonst bey Betrachtung solcher Reihen, wo statt der Buchstaben bestimmte Ziffern gesetzt werden, auf Resultate geleitet werden könnte, welche etwas widersinniges an sich haben. Z. B. wenn $x = 1$ gesetzt wird, so wird der Divisor $= 0$ und der Quotient $1 + 1 + 1$ bis ins Unendliche, also eine unendlich große Zahl, welches auch mit (60) übereinstimmt wo $\frac{1}{0} = \infty$ war.

Wenn man aber zum Divisor nimmt $1 + x$ und zum Dividend wieder: 1, so erhält man nach voriger Art.

$$
\begin{array}{l|l|l}
1 + x & 1 & 1 - x + x^2 - x^3 \ldots \\
 & 1 + x & \\
\hline
 & 0 - x & \\
 & - x - x^2 & \\
\hline
 & + x^2 & \\
 & + x^2 + x^3 & \\
\hline
 & - x^3 &
\end{array}
$$

Setzte man auch hier wieder $x = 1$, so wäre 1 durch 2 zu dividiren, welches $= \frac{1}{2}$; nach dem hier gefundenen Quotienten aber $= + 1 - 1 + 1 - 1$ 2c. Da nun dieses, wenn man eine gerade Anzahl von Gliedern nimmt, 0 giebt, so scheint es, als ob $\frac{1}{2} = 0$ wäre; nimmt man aber eine

eine ungerade Anzahl, so scheint es als ob $\frac{1}{2} = 1$ wäre. Diese Ungereimtheit verschwindet nun, sobald man die Ergänzung mit in Betracht zieht, denn bey der ungeraden Anzahl der Glieder erhält man: $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ und bey der geraden Anzahl $0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Der **Beweis** für alle diese Divisionsfälle kann kürzlich so zusammengefaßt werden: Man erhält nach der Vorschrift jedesmal einen Quotienten, der mit dem Divisor multiplicirt, den Dividend giebt, folglich ist er der richtige.

§. 135.

Anm. Die Bruchrechnung mit Buchstaben hat keiner besondern Regeln von nöthen, sondern kann blos durch ein paar Beyspiele erläutert werden z. B. um $\frac{a}{b}$ zu $\frac{c}{d}$ zu addiren, oder eins vom andern zu subtrahiren, bringt man beyde zu einerley Benennung nach (71, 73) $\frac{a\,d}{b\,d}$ und $\frac{c\,b}{b\,d}$ und es ist dann die Summe $= \frac{a\,d + c\,b}{b\,d}$ und die Differenz $= \frac{a\,d - c\,b}{b\,d}$

Soll man zu a addiren $\frac{b}{c}$, so verwandle man a in einen Bruch dessen Nenner c nach (63) neml. $a = \frac{a\,c}{c}$, und nun wird die Summe seyn $\frac{a\,c + b}{c}$ oder die Differenz $\frac{a\,c - b}{c}$

Sollte

Sollte zu m — n addirt, oder davon abgezogen werden $\frac{a}{b}$, so ist m — n $\frac{(m-n)\,b}{b}$ = $\frac{mb-nb}{b}$, also die Summe $\frac{mb-nb+a}{b}$ und die Differenz $\frac{mb-nb-a}{b}$.

Sollte $\frac{a}{b}$ mit $\frac{c}{d}$ multiplicirt werden, so wäre das Product $\frac{ac}{bd}$. oder: $\frac{a}{b}$ dividirt durch $\frac{c}{d}$, wäre der Quotient: $\frac{ad}{cb}$; oder m — n mult. mit $\frac{f}{g} = \frac{mf-nf}{g}$; und p — q divid. durch $\frac{h}{k}$ wird geben: $\frac{pk-qk}{h}$. Alles dies erfordert bloße Verbindungen der in der Bruch- und Buchstabenrechnung gegebenen Regeln.

Von den zehntheiligen- oder Decimalbrüchen.

§. 136.

Erkl. Da es willkührlich ist in wie viel kleinere Theile man eine größere Einheit theilen will, so kann man die Theilung so einrichten, daß man die Einheit blos in 10, 100, 1000 u. s. w. nemlich immer in eine zehnmal größere Menge von kleineren Einheiten theilt. Von dieser Einrichtung des Nenners werden die Brüche zehntheilige genannt. z. B. $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{100}$ rc. Der Nenner eines jeden Decimalbruches ist eine Potenz der Zehne; denn $100 = 10^2$ (35)

§. 137.

§. 137.

Anm. Man wird von selbst auf diese Art von Brüchen geleitet, wenn man das Dekadische Gesetz (11) rechts über die Einer hinaus noch weiter erstreckt. Da nemlich jeder Einer nur den zehnten Theil von dem Werth hat, welchen er in einer Stelle weiter zur linken gehabt haben würde, so wird auch nun eine Ziffer die eine Stelle weiter rechts neben der Stelle der Einer steht, Zehntheile der Einheit bedeuten müssen. Ferner, eine Einheit rechts neben den Zehntheilchen wird den zehnten Theil eines Zehntheils bedeuten; dieser ist aber ein Hundertheil, wie man sieht wenn man $\frac{1}{10}$ nach (90) mit 10 dividirt, und so geht es auf ähnliche Art ohne Ende fort. Dieses hat den Vortheil, daß man diese Art von Brüchen nach eben der Art wie die ganzen Zahlen behandeln kann.

§. 138.

Willk. Satz. Man setze, wenn Decimalbrüche vorkommen, jedesmal ein Komma neben diejenige Ziffer zur rechten welche in der Stelle der Einer steht. Ist keine geltende Ziffer in dieser Stelle vorhanden, so setzt man eine 0 mit dem Komma dahin; auch in die Stellen der Zehntheile, Hundertheile ꝛc. setzt man Nullen wenn keine geltenden Ziffern für sie vorhanden sind, und doch weiter rechts noch dergleichen vorkommen. Z. B. 36 ganze Einheiten $\frac{3}{10}$ und $\frac{4}{100}$ schreibe man so: 36, 34 oder $\frac{5}{1000}$ und $\frac{7}{100000}$ schreibe man: 0, 00507.

Oder: Man setze über diejenigen Decimalbrüche, welche 10 zum Nenner haben, wieder die Ordnungsziffer

ziffer 1; über die welche hundert haben 2 u. s. w. Da aber diese Ordnungsziffern denen in (18) angegebenen entgegengesetzt sind, so bezeichne man die in (18) mit + und die für die Decimalbrüche mit —. Z. B. obige Zahlen schreibe man so: $\overset{+1}{3}\ \overset{0}{6}\ \overset{-1}{3}\ \overset{-2}{4}$ und 0, 00507 so: $5\ 0\ \overset{-5}{7}$, so daß die Ordnungsziffer wieder so viel negative Einheiten enthält als sonst Stellen rechts neben dem Komma vorhanden wären.

§. 139.

Aufg. Einem gemeinen Bruche die Gestalt eines Decimalbruches zu geben.

Aufl. Man hänge an den Zähler so viel Nullen als die Absicht erfordert und dividire mit dem Nenner hinein, so wird man für Eine angehängte Null, Zehntheile, für zwey, Hunderttheile u. s. w. im Quotienten erhalten, die man dann nach vorigem §. bezeichnet.

Beweis. Bey dem gemeinen Bruch sollen die ganzen Einheiten, welche der Zähler enthält, mit dem Nenner dividirt werden (57), wenn man nun eine 0 an sie hängt, so werden ihrer zehnmal, und wenn man zwey Nullen anhängt, hundertmal mehr u. s. w. (39) Also wird im ersten Fall jede der zehnmal mehrern Einheiten, zehnmal kleiner, d. i. es werden itzt Zehntheilchen und im zweiten Fall Hunderttheilchen; dividirt man sie also mit

dem

dem Nenner, so wird der Quotient gleichfalls Zehntheilchen, Hunderttheilchen ꝛc enthalten müssen. Z. B. $\frac{1}{2}$ steht so: 2|10|5 = 0, 5; $\frac{3}{4}$ giebt:

4 | 30 | 75 = 0, 75;
  | 28 |
    20
    20
     0

$\frac{1}{128}$ giebt: = 0, 0078125; oder: $\frac{15}{4}$ giebt 3, 75.

§. 140.

Zus. Wenn der zu verwandelnde Bruch unter seiner kleinsten Gestalt ausgedrückt ist und sein Nenner Factoren hat, welche nicht auch Factoren von 10 sind, so wird die Division nie aufgehen; man wird also auch keinen Decimalbruch erhalten können der dem gemeinen völlig gleich wäre, sondern man wird sich blos dem Werth desselben immer mehr nähern, auf jemehr Stellen man ihn berechnet. Z. B. $\frac{2}{3}$ giebt 3 | 20 | 666 u. s. w.

  | 18 |
    20
    20
    20

oder $\frac{1}{12}$ giebt 0, 0833 . . .

§. 141.

Erklär. Brüche wie die im vorigen Zus. beschriebenen, heißen unendliche Decimalbrüche.

§. 142.

§. 142.

Aufg. Decimalbrüche zu addiren und zu subtrahiren.

Aufl. 1) Man setze sie so unter einander, daß jedesmal die von gleicher Benennung zusammen kommen.

2) Man fange das Zusammenzählen oder das Abziehen bey den kleinsten Theilen an und verfahre übrigens wie oben in (26, 28).

Beweis. Er ist eben so wie oben in (26, 28).

Z. B. die Posten sind: 36,047
0,9082
70,80054

so ist die Summe 107,75574

oder: der Minuend wäre: 8,075
der Subtrahend: 0,3804
so ist der Rest: 7,6946

§. 143.

Aufg. Decimalbrüche zu multipliciren.

Aufl. 1) Man setze über die letzte Ziffer zur Rechten die Ordnungsziffer nach (138) und lasse dann die bloßen linker Hand stehenden Nullen, hinweg.

2) Man multiplicire alsdann die Factoren wie in (40).

3) Ueber

3) Ueber die letzte Ziffer des Products zur rechten, setze man als Ordnungsziffer die Summe von den Ordnungsziffern der Factoren, so läßt sich mit Hülfe derselben das Product wieder so ausdrücken wie in (40. II.).

Beweis. Wenn man die Decimalbrüche mit ihren Nennern ausdrücken wollte, so müßten sowohl die Zähler als die Nenner in einander multiplicirt werden; (78) nach No. 2 der Aufl. aber wird das Product der Zähler gefunden. Da nun jeder Nenner der Factoren eine 1 mit so viel anhängenden Nullen ist, als die Ordnungsziffer Einheiten hat, und ein Product aus Zahlen die aus 1 mit anhängenden Nullen bestehen, wieder aus einer 1 besteht, an welcher so viel Nullen hängen, als in den Factoren zusammen waren, (39) so hat man nur nöthig im Product die hinter die 1 des Nenners gehörigen sämmtlichen Nullen anzuzeigen; dies geschieht aber wenn man die Ordnungsziffern addirt.

Z. B. 4, 0 3 mult. mit 0, 0 0 1 6 steht so:

$$
\begin{array}{r}
40\overline{3}^{\,2} \\
1\overline{6}^{\,4} \\
\hline
2418 \\
403 \\
\hline
644\overline{8}^{\,6} = 0{,}006448
\end{array}
$$

§. 144.

Zus. Besteht einer der beyden Factoren au ganzen Einheiten, so ist die Ordnungsziffer der selben 0, also bekommt das Produkt wieder di Ordnungsziffer des andern Factors d. i. es ent hält wieder eben solche Decimaltheile wie der Fa ctor der ein Decimalbruch war. Z. B. 0, 0 1 2 mult. mit 24, steht so:

$$\begin{array}{r} 1\,2\,\overset{-4}{6} \\ \overset{0}{2\,4} \\ \hline 5\,0\,4 \\ 2\,5\,2 \\ \hline 3\,0\,2\,\overset{-4}{4} = 0,\,3\,0\,2\,4 \end{array}$$

§. 145.

Zus. Ist der eine Factor eine ganze Zahl a welcher Nullen hängen, so kann man ihn nac (18) mit einer bejahenden Ordnungsziffer aus drücken und nach eben den Regeln verfahren wi vorhin. Z. B. 1 3 0 0 0 mult. mit 0, 0 7 steht so

$$\begin{array}{r} 1\,\overset{+3}{3} \\ \overset{-2}{7} \\ \hline 9\,\overset{+1}{1} = 9\,1\,0 \end{array}$$

§. 146.

Aufg. Decimalbrüche in einander zu divi diren.

Aufl

Aufl. 1) Man drücke Divisor und Dividend wieder mit ihren Ordnungsziffern aus.

2) Man dividire wie in (43).

3) Dem Quotienten gebe man zur Ordnungsziffer diejenige welche entsteht, wenn man die des Divisors von der des Dividends abzieht, und drücke ihn mit Hülfe derselben wieder wie in (138) aus.

Beweis. Man erhält auf diese Art einen Quotienten, der mit dem Divisor multiplicirt, den Dividend giebt, folglich den richtigen. Denn wenn nach geschehener Multiplication zur Ordnungsziffer des Divisors eine addirt wird, welche die Differenz zwischen ihr und der des Dividends ist, so muß die des Dividends wieder heraus kommen. Weiter kann dieses auch dadurch noch erläutert werden, daß man die Decimalbrüche nach Art der gemeinen mit ihren Nennern ausdrückt z. B. Divisor: 0, 03; Dividend: 0, 0015, so setze man: $\overset{-2}{3} \mid \overset{-4}{15} \mid \overset{-2}{5} = 0,\ 05$

oder: nach der gemeinen Bruchrechnung ist $0,\ 03 = \frac{3}{100}$ und $0,\ 0015 = \frac{15}{10000}$ also der Quot. nach (87) $\frac{1500}{30000}$ Mit 100 aufgehoben, giebt $\frac{15}{300}$ also ist 15 mit 3. 100 d. i. erstlich mit 3, und dann noch mit 100 zu dividiren, 3 in 15 aber giebt 5, und dies mit 100 divid. $\frac{5}{100} = 0,\ 05$ wie vorhin. Oder: Divis. 0, 004; Dividend 0, [illegible]6

steht so: $\overset{-3}{4} \mid \overset{-2}{16} \mid \overset{+1}{4} = 40$. Wünschte man es so zu haben, daß die Ordnungsziffer des Divisors nie größer als die des Dividends wäre, so dürfte man nur an den Dividend so viel Nullen hängen, als zu seiner Ordnungsziffer noch Einheiten fehlen, um so groß als die des Dividends zu werden, so wird alsdann die des Quotienten 0, und folglich er selbst eine ganze Zahl.

§. 147.

Zus. Wenn bey der Division ein Rest bleibt, so kann man Nullen daran hängen und weiter fort dividiren; alsdann aber muß man auch zur Ordnungsziffer des Dividends so viel Einheiten addiren, als man Nullen angehängt hat. Auf diese Weise läßt sich die Division entweder so weit fortsetzen, bis kein Rest mehr bleibt, oder bis man wenigstens den Quotienten so weit hat, daß man auf den noch bleibenden Rest nicht mehr zu achten braucht. Z. B. Divis. 0, 025; Divid. 0, 0034

```
 -3     -4
 25 |  34  | 136
    |  25  |
    --------
        90
        75
       ----
       150
       150
       ----
         0
```

Hier hat man beym Fortsetzen der Division noch 2 Nullen angehängt, also wird statt — 4 die Ordnungsziffer — 6 und hiervon — 3 abgezogen bleibt für die des Quotienten: — 3, also ist der Quot. $13\overset{-3}{6} = 0,136$

§. 148.

Zus. Divisor oder Dividend, oder beyde, können auch ganze Zahlen, und der Divisor von einer höheren Ordnung, als der Dividend seyn, und man wird immer nach obigen Regeln verfahren können. Einige Beyspiele werden dies erläutern. Es sey Divis. 8; Divid. 0, 048 also: $\overset{0}{8} \mid 4\overset{-3}{8} \mid \overset{-3}{6}$ = 0, 006 oder: Divis. 0, 04; Divid. 1600 also: $\overset{-2}{4} \mid 1\overset{+2}{6} \mid \overset{+4}{4}$ = 40000 oder: Divis. 6000 Divid. 120 also: $\overset{+3}{6} \mid 1\overset{+1}{2} \mid \overset{-2}{2}$ = 0, 02

§. 149.

Anm. Bey Multiplikationen und Divisionen, wo in den gegebenen Zahlen unendliche Decimalbrüche vorkommen, kann das Product oder der Quotient nicht genau gefunden werden. Man kürzt deshalb die Multiplikation und Division so weit ab, daß man blos diejenigen Ziffern bekommt, die man für die richtigsten halten kann. M. s. davon der Kästnerischen Arithm. III. Kap. 13 ꝛc.

Von den sechszigtheiligen = oder Sexagesimalbrüchen.

§. 150.

Erkl. Die Eintheilungen der Alten nach Schocken und Sechszigtheilen, welche bey dem Stunden und Kreisbogenmaas vorkommt, hat Anlaß gegeben auch solche Brüche zu betrachten,

wo der Nenner eine Potenz der 60 ist (35) z. B. $\frac{3}{60^1}$; $\frac{17}{60^2}$; $\frac{23}{60^3}$ ꝛc. sind Sexagesimalbrüche; hingegen 3. 60 sind 3 Schocke (Sexagenae) 5. 60^2 sind 5 Schocke von Schocken ꝛc.

§. 151.

Anm. Die Theile der Stunden oder der Grade von Kreisbogen welche durch Division der 60^1 entstanden sind, nennt man auch Minuten; die durch 60^2 entstandenen Sekunden u. s. w. Tertien, Quarten, so daß, wie man sieht, der Exponent des Nenners Anlaß zu dieser Benennung gegeben hat.

§. 152.

Willk. Satz. Da diese Brüche den zehntheiligen ziemlich ähnlich sind, so hat man die Nenner eben so wie bey jenen weggelassen, und die Zähler mit Ordnungsziffern bezeichnet, und dazu die Exponenten der Nenner mit dem Zeichen —, gewählt; so wie für die Schocke, + 1 und die Schocke von Schocken, + 2 ꝛc. Die ganzen Einheiten aber werden wieder mit o bezeichnet. Z. B.

$$3 . 60 + 5 + \frac{7}{60} + \frac{1}{60 : 60} = \overset{+1}{3} + \overset{0}{5} + \overset{-1}{7} + \overset{-2}{1}$$

§. 153.

Aufg. Sexagesimalbrüche zu addiren und zu subtrahiren.

Aufl. Man verfahre mit ihnen völlig so wie mit den benannten Zahlen in (96, 97). So oft man nemlich

ziemlich bey dem Zusammenzählen über 60 erhält, werden die geringern Einheiten zu den höhern durch Division mit 60 reducirt; und wenn beym subtrahiren eine Einheit geborgt wird, so gilt sie 60 Einheiten in der nächstniedrigern Stelle.

	0	-1	-2	-3
Z. B.	36	44	8	57
	9	36	54	28
Summe:	46	21	3	25
Unterschied	27	7	14	29

§. 154.

Aufg. Mit solchen Brüchen die Multiplication zu verrichten.

Aufl. Man multiplicire alle Glieder des Multiplicands mit allen des Multiplikators und gebe jedem einzelnen Product zur Ordnungsziffer diejenige welche entsteht, wenn man die Ordnungsziffer der Factoren summirt. So oft das Produkt über 60 ist, wird es wie in voriger Aufgabe zur höhern Gattung reducirt. Am Ende addirt man die einzelnen Producte welche einerley Ordnungsziffern haben. (143)

Beweis. Er ist ist eben so wie der für die Multiplication der Decimalbrüche, (143).

3. B. der Multiplikand:

$$\begin{array}{rrrr}
 & 4^{0} & 8^{-1} & 12^{-2} \\
 & & 9^{-1} & 10^{-2} \\
\hline
 & 41^{-2} & 22^{-3} & 0^{-4} \\
37^{-1} & 13^{-2} & 48^{-3} & \\
\hline
37^{-1} & 55^{-2} & 10^{-3} &
\end{array}$$

§. 155.

Aufg. Die Division mit diesen Brüchen zu verrichten.

Aufl. 1) Nachdem man alle Glieder gehörig geordnet hat, dividirt man mit dem höchsten Gliede des Divisors in das höchste des Dividends und giebt dem Quotienten zur Ordnungsziffer diejenige welche übrig bleibt, wenn man die des Divisors von der des Dividends abzieht.

2) Mit dem Quotienten multiplicirt man alle Glieder des Divisors und zieht die Producte von den ihnen entsprechenden Gliedern des Dividends ab.

3) Wenn das erste Glied zu klein wäre, als daß man hinein dividiren könnte, so reducirt man es zur nächstniedrigern Klasse und nimmt die etwa schon vorhandenen Einheiten dieser Klasse mit dazu. So verfährt man bis ans Ende.

Beweis. Der so bestimmte Quotient giebt auch hier mit dem Divisor multiplicirt, ein Produkt, welches

welches dem Dividend gleich ist, und ist mithin richtig.

```
         -1   -2   |  -1   -2   -3  |  0  -1   -2
Z. B.   9   10     | 37   55   10   |  4   8   12
                   | 36   40        |
                   |----------      |
                          15
                       1=60
                      ----------------
                         -2    -3
                        75.   10
                        73    20
                        ---------
                              50
                           1=60
                      ----------------
                                -3
                             110
                                -3
                             110
                             -------
                                0
```

§. 156.

Anm. Um das Multipliciren sowohl, als die Reduction durch 60 zu erleichtern, hat man nach Art des Einmaleins auch für diese Rechnung eine Tafel verfertigt, worin sich nicht allein das Product für alle Faktoren die noch unter 60 sind, findet, sondern wo auch zugleich die Reduction, wo sie nöthig, mit besorgt ist. Man findet sie unter dem Namen: Canon Sexagenarum in verschiedenen z. B. Strauchs, Tafeln.

Von den Potenzen oder Dignitäten.

§. 157.

Erkl. Was man unter Potenz oder Dignität, Wurzel und Exponenten überhaupt versteht, ist be-

reits in (35) kürzlich erklärt worden. Hier ist noch zu bemerken, daß man auch die zweite Potenz das Quadrat, die dritte den Würfel oder Kubus; die 4te das Biquadrat, nennt. Die höhern nennt man gewöhnlich nach der Zahl der Einheiten ihres Exponenten z. B. die 5te; 6te ꝛc. so ist z. B. 64 der Kubus von 4, und 16 das Biquadrat von 2.

§. 158.

Erkl. Eben so heißt nun auch die Wurzel von der 2ten Potenz die Quadratwurzel; die von der dritten, die Kubikwurzel u. s. w. Man bezeichnet sie mit: $\surd$ z. B. $\sqrt{9} = 3$. Wenn die Wurzel einer höhern Potenz soll angezeigt werden, so schreibt man in das Wurzelzeichen noch die Ziffer welche den Grad der Potenz anzeigt. Z. B. $\sqrt[3]{8}$ heißt die Kubikwurzel von 8 welche $= 2$. Im Quadratwurzelzeichen kann man sich die 2 vorstellen.

§. 159.

Zus. Wenn die Wurzel, oder erste Potenz $= a$ ist, so wird das Quadrat durch a^2; der Kubus, oder die dritte Potenz, durch a^3 und die welche aus so viel Factoren besteht, als eine gewisse Zahl z. B. n, Einheiten hat, oder die nte Potenz, wird durch a^n ausgedrückt. Der Ausdruck $\sqrt[n]{a}$ bedeutet eine Größe, die, wenn sie als Factor, n mal neben einander gesetzt und in sich multiplicirt wird, die Größe a hervorbringt. Man sieht hieraus, daß

daß die Potenz um einen Grad erhöht wird, und mithin der Exponent um 1 zunimmt, wenn man sie aufs neue mit der Wurzel multiplicirt.

§. 160.

Zus. Wenn ein Bruch zu einer gewissen Potenz z. B. n erhoben werden soll, so wird man sowohl seinen Zähler, als seinen Nenner zu dieser Potenz erheben, und dann beyde wieder Bruchweise schreiben müssen; d. i. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, z. B. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$ (78). Hinwiederum folgt hieraus, daß wenn eine gewisse Wurzel aus einem Bruch gezogen werden soll, solche sowohl aus dem Zähler, als aus dem Nenner besonders zu ziehen und dann wieder Bruchweise auszudrucken ist. So ist z. B. $\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ oder: $\sqrt{\tfrac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \tfrac{2}{3}$.

§. 161.

Aufg. Potenzen zu addiren und zu subtrahiren.

Aufl. Es geschieht ganz auf die Art, als es in (128) von Buchstaben gelehrt worden ist.

§. 162.

Aufg. Potenzengrößen in einander zu multipliciren.

Aufl.

Aufl. I. Fall. Wenn sie von einerley Wurzel sind, so addire man blos die Exponenten und setze deren Summe wieder als Exponent über die Wurzel, so wird dies das Product seyn. Z. B. 4^3 $4^2 = 4^5$; oder $a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$; oder $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$; oder $y^n \cdot y = y^{n+1}$ (159)

II. Fall. Wenn die Wurzeln und Exponenten verschieden sind, so werden die Größen blos neben einander gesetzt, wie in (122). Z. B. 3^2 mal $2^3 = 3^2 \cdot 2^3$; oder a^3 mult. mit $b^2 = a^3 b^2$; $x^m \cdot y^n = x^m y^n$.

III. Fall. Wenn bey verschiedenen Wurzeln die Exponenten einerley sind, so multiplicirt man die Wurzeln in einander und giebt dem Product den gemeinschaftlichen Exponenten. Z. B. $2^3 \cdot 3^3 = 6^3$ oder $a^3 \cdot b^3 = (a\,b)^3$ oder $x^m \cdot y^m = (xy)^m$

Beweis, für I. Da der Exponent die Anzahl der Factoren anzeigt und diese bey der Multiplication neben einander gesetzt werden, so wird das Product aus so vielen bestehen, als die Factoren deren zusammen enthalten haben, nemlich statt $a^3 \cdot a^2$ kann man setzen: $aaa \cdot aa = aaaaa = a^5$. Da ferner jeder Buchstabe eine Potenz, und zwar die erste von sich vorstellen kann, so kann man y^1, statt y setzen, folglich $y^n \cdot y^1 = y^{n+1}$ Das Verfahren bey der Multiplication der Decimal- und Sexagesimalbrüche, und selbst der ganzen Zahlen wo Ordnungsziffern gebraucht werden, bezieht sich mit auf diesen Fall.

Für

Für II. ist der Beweis wie oben bey der Multiplication in Buchstaben (122, 131).

Für III. Man setze statt $a^3 . b^3$ die mehrern Factoren selbst hin, nemlich $a\,a\,a\,b\,b\,b$; da es nun auf die Ordnung der Factoren nicht ankommt, (37) so kann man das letzte Produkt auch so ausdrücken: $a\,b\,a\,b\,a\,b$ d. i. es besteht aus drey Factoren deren jeder $= a\,b$ ist, folglich kann man dafür setzen: $(a\,b)^3$, (35).

§. 163.

Aufg. Potenzengrößen durch einander zu dividiren.

Aufl. I. Fall. Wenn Divisor und Dividend von einerley Wurzel sind, so nehme man diese Wurzel wieder in den Quotienten und gebe ihr die Differenz zwischen den Exponenten des Dividends und Divisors zum Exponenten. Z. B. $4^2 | 4^6 | 4^4$; oder $x^m | x^{m+n} | x^n$ oder $y | y^n | y^{n-1}$

II. Fall. Wenn die Wurzeln und Exponenten verschieden sind, so drücke man den Quotienten Bruchweise aus, oder verfahre wie in (134) z. B. Divis. a^2, Divid. b^3, so ist der Quot. $\frac{b^3}{a^2}$ oder x^m div. durch $y^n = \frac{x^m}{y^n}$ oder $b^2 | a^3 b^2 | a^3$

III. Fall. Wenn die Exponenten gleich sind, so kann man blos die Wurzeln Bruchweise schreiben,

und

und dem Bruch wieder den vorigen Exponente geben z. B. a^3 div. durch $b^3 = \frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)$ Dieser Fall kommt, wie man sieht, mit (160) übe ein, wo von Bruchpotenzen die Rede war.

Der Beweis für alle diese Fälle ist eben s wie für die vorhergehenden Divisionen. Er ergiel sich nemlich von selbst, wenn man bedenkt, da die Division das umgekehrte Verfahren der Mu tiplication ist.

§. 164.

Zus. Wenn man eine Potenz durch sich selb dividirt, so ist der Quotient 1, wie überhaupt be jeder Größe wo dieses geschieht. Verrichtet ma indeß diese Division nach (163. I.) so wird de Quotient wieder die Wurzel, mit dem Exponen ten o. Hieraus folgt, daß jede Größe in der Po tenz o, allemal = 1 ist, die Größe selbst ma so groß oder so klein seyn, als sie will z. B $\frac{a}{a} = \frac{a^1}{a^1} = a^0 = 1.$

§. 165.

Zus. Dividirt man a^0 weiter durch a^1, so gieb dies nach (163. I.) a^{-1}, nach der gemeinen Ar aber: $\frac{a}{a^1}$ oder $\frac{1}{a}$, folglich ist $a^{-1} = \frac{1}{a}$ und nac eben der Betrachtung $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; überhaupt $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ Potenzen mit negativen Exponenten stellen als

Brüche

Brüche vor, deren Zähler 1, und der Nenner eben dieselbe Potenz, aber mit positivem Exponenten ist.

§. 166.

Aufg. Eine Potenz aufs neue zu einer Potenz zu erheben.

Aufl. Man multiplicire den Exponenten der zu erhebenden Potenz, mit der Zahl welche den Grad anzeigt, zu welchem sie aufs neue erhoben werden soll, das Produkt schreibe man als Exponenten über die vorige Wurzel. Z. B. a^2 soll zum Kubus erhoben werden, so hat man $(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6$ oder $(x^n)^m = x^{n\,m}$

Beweis. Man muß die vorhandene Potenz als Factor so vielmal neben sich selbst setzen, als der Grad der verlangten neuen Potenz Einheiten hat, z. B. a^2 zur 3ten Potenz erhoben, giebt $a^2 \cdot a^2 \cdot a^2$ dies ist aber nach (162. I.) $= a^6$

§. 167.

Zus. Man wird also hinwiederum die Wurzel eines gewissen Grades aus einer Potenz ziehen, wenn man den Exponenten der Potenz mit der im Wurzelzeichen stehenden Zahl dividirt. Z. B. $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$; $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Da es nun Fälle geben kann, wo $n > m$ oder auch $\frac{m}{n}$ ein unreiner Bruch ist, so wird man Potenzen mit gebrochenen Exponenten erhalten; diese stellen also ausgezo-

gezogene Wurzeln vor. Z. B. $\sqrt{9} = \sqrt[2]{9^1}$ $= 9^{\frac{1}{2}} = 3$. Auch: $\sqrt{\frac{1}{a}} = a^{-\frac{1}{2}}$, (165).

§. 168.

Zus. Da man die Wurzelgrößen als Potenzen ansehen kann, so wird auch die Rechnung mit ihnen, von der mit Potenzen, nicht unterschieden seyn. Z. B. die Summe von $3\sqrt{a}$ und $2\sqrt[3]{b}$ $= 3\sqrt{a} + 2\sqrt[3]{b}$ oder $m\sqrt[n]{x}$ und $n\sqrt[n]{x}$ $= (m + n)\sqrt[n]{x}$;

Eben so die Differenz zwischen $5\sqrt{3}$ und $3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. oder $m\sqrt[n]{x} - n\sqrt[n]{x} =$ $(m - n)\sqrt[n]{x}$.

Das Product von $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$ ist $= a$ oder $(\sqrt[n]{a})^n$ $= a$; oder $\sqrt{(ab)} = \sqrt{a}\sqrt{b}$; oder $\sqrt{24} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 2 \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$.

Rückwärts ist der Quotient von a divid. durch $\sqrt{a} = \sqrt{a}$. (41) Dies erhellet auch so: man setze: $\frac{a}{\sqrt{a}}$ und multiplicire oben und unten mit $\sqrt{a}$, so erhält man $\frac{a\sqrt{a}}{a} = \sqrt{a}$ (134).

Von

Von der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel.

§. 169.

Erkl. Wenn man eine Wurzel als die Summe zweyer einzelnen Theile ausdrückt, so heißt sie eine zweytheilige oder binomische. Z. B. 10 + 2 oder a + b. Besteht sie aus 3 Theilen z. B. a + b + c so heißt sie dreytheilig, und überhaupt vieltheilig, **polynomisch**, wenn sie aus mehr als 2 Theilen besteht.

§. 170.

Zus. Da man jede ungetheilte Größe nach Gefallen theilen kann (6 Einl.) und eine Menge Theile sich eben so willkührlich in einen einzigen zusammenfassen lassen, so wird man jede Wurzel als eine zweytheilige ansehen können. Da der Gebrauch derselben in der Folge oft vorkommen wird, so soll itzt umständlicher von ihr gehandelt werden.

§. 171.

Aufg. **Die Natur des Quadrats einer zweytheiligen Wurzel zu untersuchen.**

Aufl. Man multiplicire ihren allgemeinen Ausdruck in sich selbst, so werden sich folgende drey Bestandtheile des Quadrats zeigen: 1) das Quadrat des einen Theils 2) das Product des einen Theils in den andern, doppelt, und 3) das Quadrat des andern Theils.

Es sey diese Wurzel $= a + b$ oder $10 + 2$

$$\begin{array}{rr} a + b & 10 + 2 \\ \hline + ab + b^2 & + 20 + 4 \\ a^2 + ab \quad & 100 + 20 \quad \\ \hline \end{array}$$

also $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2 \quad 100 + 2.20 + 4 = 14$

§. 172.

Zus. Wäre die Wurzel $a + b + c$, so könn man sie in die beyden Theile $(a + b)$ und c the len und ihr Quadrat wäre nach vorigem §. $=$ $(a + b)^2 + 2\,(a + b)\,c + c^2$. Käme zu vorige drey Theilen noch der vierte: d, so könnte nu der erste Theil $= (a + b + c)$ und der andere seyn. Also wieder das Quadrat $(a + b + c)$ $+ 2\,(a + b + c)\,d + d^2$. Man sieht also wenn die Wurzel a ist, so ist ihr Quadrat $= a$ (159); kommt zu ihr ein neuer Theil b, so komm zu ihrem Quadrat ein doppeltes Product aus de vorigen Wurzel in den neuen Theil nebst de Quadrat des neuen Theils. Kommt abermals ei neuer Theil c, dazu, so kommt zum nächstvo hergehenden Quadrat wieder ein doppeltes Pr duct aus der nächstvorhergehenden Wurzel in de neuen Theil, nebst dem Quadrat des neuen Theil und so bis ins Unendliche.

§. 173.

Zus. Wüßte man also nur aus dem Quadra einer wirklich zweytheiligen Wurzel diese Wurz

zu finden, so könnte man nach eben den Regeln auch jede vieltheilige finden; man dürfte nur jedesmal alle bereits gefundenen Theile zusammen als einen einzigen, nemlich wieder als den ersten, ansehen, und auf eben die Art wie man zum allerersten den zweiten fand, nun den neuen suchen.

§. 174.

Willk. Satz. Man theile jede Zahl des decadischen Gesetzes die als Wurzel betrachtet wird, nach ihren Einern, Zehnern, Hundertern ꝛc. in mehrere Theile, und sehe nach (172) zuerst die Ziffer der höchsten Ordnung als den ersten, und die nächste Ziffer als den zweiten Theil an, indem man auf die übrigen, welche nach ihr folgen, vor der Hand noch gar keine Rücksicht nimmt. Hierauf betrachte man die beyden höchsten Ziffern zusammen als den ersten, und die nächste abermals als den zweiten Theil, und so fort bis man auf die letzte gekommen ist. Z. B. wenn $a + b + c$ $300 + 20 + 4 = 324$ bedeuten, so sind anfangs die 3 Hunderter als der erste und die 2 Zehner als der zweite; alsdann aber die 32 Zehner als der erste, und die 4 Einer als der zweite Theil anzusehen.

§. 175.

Anm. Die Quadrat- und Kubikzahlen der einzelnen Ziffern sind in folgendem Täfelchen enthalten:

Wurzeln:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrate:	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Würfel:	1	8	27	64	125	216	343	512	729.

§. 176.

Lehrs. Jede Wurzel die aus einer Ziffer besteht, hat im Quadrat nicht weniger als eine, und nicht mehr als 2 Ziffern; jede aus n Ziffern bestehende, nicht weniger als 2 n - 1 und nicht mehr als 2 n; z. B. bey 2 in der Wurzel, im Quadrat nicht weniger als 3, und nicht mehr als 4 ꝛc

Beweis. Das erste erhellet aus dem Wurzeltäfelchen, und von dem folgenden wird man überzeugt, wenn man die Grenzzahlen zu Quadraten macht. Z. B. die kleinste Zahl mit 2 Ziffern ist 10 und deren Quadrat = 100, welches 3 Ziffern hat; die größte mit 2 Ziffern ist 99 deren Quadrat = 9801 aus 4 Ziffern besteht, und so erhellet es auch von den folgenden.

§. 177.

Zus. Wenn man also ein nach dem decadischen Gesetz ausgedrücktes Quadrat von der rechten nach der linken in Klassen abtheilt, und jede Klasse 2 Ziffern giebt, auch dabey die letzte Ziffer zur linken, wenn sie etwa einzeln stünde, auch für eine ganze Klasse rechnet, so wird die Wurzel allemal so viel Ziffern haben, als man Klassen erhält. Z. B. das Quadrat von 10 = 100 und

das

das von 99 = 9801, giebt 2 Klassen; das von 100 = 10000 schon 3 Klassen u. s. w.

§. 178.

Lehrs. Wenn eine Wurzel aus 2 der Ordnung nach zunächst auf einander folgenden Ziffern besteht, so fangen sich 1) die Einheiten welche zum Quadrat der niedrigern Ziffer gehören in der ersten Stelle zur rechten an und erstrecken sich höchstens bis in die 2te Stelle zur linken. 2) Die zum doppelten Product gehörigen fangen sich in der genannten 2ten Stelle an, und erstrecken sich bis in die 4te zur linken, aber auch diese und die vorigen Einheiten zusammengenommen, erstrecken sich nicht weiter als in eben diese Stelle. 3) Die zum Quadrat der höhern Ziffer gehörigen, fangen sich in der 3ten Stelle an, und erstrecken sich auch nur bis in die vierte. 4) Die aus No. 1 und 2 mit in die dritte und vierte Stelle kommenden Einheiten vermehren das Quadrat der höhern Ziffer nicht so beträchtlich, daß die hierdurch entstehende Zahl das Quadrat einer Zahl werden könnte, welche um eine Einheit mehr betrüge, als die höhere der beyden angenommenen Ziffern ist.

Beweis. No. 1, 2 und 3 erhellen, wenn man zu den beyden Ziffern, die größten wählt, die es

 giebt,

giebt, nemlich: 9 9 und die Bestandtheile des Quadrats so dar- 9 9 stellt:

$$
\begin{array}{rcccl}
 & 8\,1 & = & 81 & \\
8\,1 & \left.\right\} & = & 162 & \left.\right\} = 1\,7\,0\,1 \\
8\,1 & & & & \\
8\,1 & & = & 81 & = 8\,1 \\
 & & & & \overline{9\,8\,0\,1}
\end{array}
$$

Sieht man die 9 linker Hand in der Wurzel als neun Zehner an, so müßten, wenn No. 4. nicht wahr wäre, die Ziffern 98 in der 3ten und 4ten Stelle zur Wurzel zehn Zehner haben können, welches aber nicht andem ist, indem ihnen hierzu noch 2 Einheiten von der 3ten Stelle fehlen; also ist auch No. 4 ausser Zweifel.

§. 179.

Zus. Die beyden 9 9 können einen Werth haben was sie für einen wollen. Kommt zu ihnen rechts noch ein neuer Theil, so sieht man sie nach (174) beyde zusammen als den ersten an, und die Behauptungen des vorigen Lehrsatzes werden sich auf ähnliche Art bey dieser neuen zweytheiligen Wurzel wiederholen lassen. Mündlich kann dieses weiter erläutert werden. Die vollständige Theorie aber findet man in der Kästn. Arithm. Kap. IV.

§. 180.

Aufg. Aus einer Zahl die drey und mehr Ziffern hat, die Quadratwurzel zu ziehen.

Aufl.

Aufl. 1) Man theile sie in Klassen nach (177)

2) Man suche die Zahl welche in der letzten Klasse zur linken steht im Wurzeltäfelchen unter den Quadraten auf, oder wenn diese nicht vorhanden seyn sollte, die nächstgeringere, so wird die über ihr stehende Wurzel der erste Theil der gesuchten seyn.

3) Die unter den Quadraten aufgesuchte Zahl ziehe man von den Ziffern der letzten Klasse ab, und nehme zum Rest die Ziffern der nächsten Klasse.

4) Man verdoppele den gefundenen ersten Theil der Wurzel und fange dieses Duplum unter der Ziffer, die in der neuen Klasse die linke Stelle einnimmt, zu schreiben an.

5) Die in No. 3. zuletzt erhaltenen Ziffern sehe man als ein Dividend, und die nach No. 4 erhaltenen als den Anfang eines demselben zugehörigen Divisors an, dessen Ergänzung man findet, wenn man mit seiner ersten Ziffer in die über derselben stehenden dividirt.

6) Diese gefundene Ergänzung hänge man also noch an den Divisor und multiplicire ihn dann gewöhnlichermasen mit eben der Zahl die vorhin als Ergänzung angesehen wurde; läßt sich dieses Product von den als Dividend betrachteten Ziffern abziehen, so ist der Quotient, der als Ergänzung des Divisors angesehen wurde, auch zugleich der zweite Theil der Wurzel. Läßt sich aber das Pro-

duct nicht abziehen, so vermindert man den erwähnten Quotienten so lange, um 1 Einheit, bis die Abziehung geschehen kann.

7) Wenn ein Rest bleibt und noch eine Klasse vorhanden ist, so nimmt man zu ihm wieder wie in No. 3. die Ziffern dieser neuen Klasse; sieht die beyden gefundenen Ziffern zusammen als den ersten Theil an, und verfährt völlig wieder wie in No. 4, 5 und 6, so findet man nach und nach alle Theile der Wurzel.

Beweis. No. 1 bis 4 sind Resultate aus den unmittelbar vor der Aufgabe hergegangenen Betrachtungen. No. 5 erhellet, wenn man die allgemeine Quadratformel aus (171) betrachtet. Wenn nemlich die Abziehung des Quadrats vom ersten Theil geschehen ist, so stellen die am Ende von No. 3 erhaltenen Zahlen das doppelte Product aus dem ersten Theil in den andern, nebst dem Quadrat des andern Theils, oder in der Formel, die $2ab + b^2$ vor. Dieser Ausdruck läßt sich als ein Product ansehen, welches aus den beyden Factoren: $2a + b$ mal b besteht. Der letzte Factor ist der zweite Theil der Wurzel, den man zu haben wünscht; wäre nun der erste bekannt, so dürfte man mit demselben nur in das Product dividiren, so würde der andere zum Quotienten kommen. Vom ersten Factor ist aber nur der Anfang, $2a$ bekannt, den man erhält, wenn man den gefundenen ersten Theil der Wurzel, a, duplirt.

·lirt. Da man nun bey jeder Division, wo der Divisor aus mehreren Theilen besteht, doch nur nit dem ersten Theil desselben die Division ver- ichtet (43), so kann man auch die Division einst- veilen mit 2 a vornehmen, und das b welches nan erhält, einmal als Ergänzung des Divisors, ınd dann auch noch als den Quotienten, der den gesuchten andern Factor des Products giebt, an- ehen, und dies ist der Grund von No. 5 und 6. Die No. 7 gründet sich auf (179). Z. B. die Zahl sey:

```
                                       a     b
                                     a    b :
                                   a  b  :  :
                 5 | 3 0 | 8 4 | 1 6 | 2  3  0  4
   a²      =     4 |
 2ab+b²    =     1 | 3 0 |
  2a+b     . .     | 4 3 |
 (2a+b)b   =     1 | 2 9 |
 2ab+b²    =         1 | 4 8 |
  2a+b     =         4 | 6 0 |
 (2a+b)b   =         0   0 0 |
 2ab+b²    =     1   8   4 | 1 6 |
  2a+b     =         4   6 | 0 4 |
 (2a+b)b   =     1   8   4 | 1 6 |
                           0
```

§. 181.

Zus. Wenn bey der letzten Klasse ein Re
bleibt, so kann man sich vorstellen, daß noch ein
neue Klasse vorhanden wäre, deren beyde Ziffer
aus Nullen bestünden; diese beyden Nullen kan
man also an den Rest hängen, und nach der ge
gebenen Vorschrift weiter fortfahren. Der neu
Theil der Wurzel wird dann abermals um ein
Ordnung niedriger seyn, als der nächst vorher
gehende; ist nun dieser, wie z. B. hier die 4, ei
Einer gewesen, so wird dieser neue Theil de
Wurzel Zehntel enthalten, (137) und so kann ma
bey einem abermaligen Reste durch beständige Wi
derholung des vorigen Verfahrens Hundert- Tau
send- Theile u. s. w. erhalten, die man dann auc
wieder durch ein Komma von den Ganzen abson
dert. Z. B. die Zahl sey 12, also:

```
12 | 3,46 . . .
 9 |
---
 3 | 00
   | 64
 2 | 56
----------
    44 | 00
     6 | 86
    41 | 16
    ----------
     2  84 u. s. w.
```

Di

Dieses Verfahren läßt sich noch mehr durch folgende Betrachtung rechtfertigen. Wenn man findet, daß von einer Zahl, wie hier 12, die Quadratwurzel nicht durch ganze Einheiten dargestellt werden kann, und verlangt deshalb noch Zehntheile dazu, so kann man sich vorstellen, daß alsdann die ganze Wurzel in Zehntheilen ausgedrückt wäre (170). Um also in der Wurzel Zehntheile zu bekommen, muß man die Quadratzahl in Hundertheilen ausdrücken (160), und dies geschieht, wenn man die ganze Zahl nach (63) in einen Bruch verwandelt, dessen Nenner 100 ist, nemlich so: $\frac{1200}{100}$; die Wurzel aus dem Zähler wird nach obigen Regeln werden: 34, und die aus dem Nenner: 10, also die aus dem Bruche, $\frac{34}{10} = 3, 4$ wie vorhin. Hätte man Hunderttheile in die Wurzel verlangt, so wäre die ganze Zahl durch $\frac{120000}{10000}$ auszudrücken gewesen. u. s. w.

§. 182.

Anm. Die Erfahrung wird lehren, daß wenn man einmal hat Nullen anhängen müssen, alsdann jedesmal ein Rest bleibt, man mag die Arbeit fortsetzen so lange man will. Man nähert sich also blos der Wurzel immer mehr, ohne sie je völlig zu erhalten. Einen Beweis hierzu findet man im IV Kap. der Kästn. Arithm. wo $\frac{u}{x}$ einen uneigentlichen und in seiner kleinsten Gestalt (68) ausgedrückten Bruch bedeutet.

§. 183.

Anm. Die Probe wird gemacht, wenn man di Wurzel mit sich selbst multiplicirt und zum Pro duct den etwa gebliebenen Rest addirt, da dann die Zahl mit den etwa angehängten Nullen wieder heraus kommt.

Z. B.

$$
\begin{array}{r}
34\overset{-2}{6} \\
34\overset{-2}{6} \\
\hline
2076 \\
1384 \\
1038 \\
284 \text{ Rest} \\
\hline
\overset{-4}{120000} = 12
\end{array}
$$

§. 184.

Aufg. **Die Natur des Würfels einer zwey theiligen Wurzel zu untersuchen.**

Aufl. Man multiplicire das in (171) gefun dene Quadrat nochmals mit der Wurzel, so wer den sich die Bestandtheile desselben eben so, wie beym Quadrate, zeigen.

$$
\begin{array}{lr}
\text{Es war das Quadrat:} & a^2 + 2ab + b^2 \\
\text{Die Wurzel:} & a + b \\
\hline
 & + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
 & a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
\hline
\text{Der Würfel:} & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{array}
$$

Man

Man findet also hier folgende 4 Bestandtheile. 1) Den Würfel des einen Theils: a^3. 2) Das Quadrat des einen Theils in den andern dreyfach: $3 a^2 b$. 3) Den einen Theil in das Quadrat des andern, gleichfalls dreyfach: $3 a b^2$ und 4) Den Würfel des andern Theils: b^3

Es seyn z. B. die Theile wieder $10 + 2 = 12$

so ist
$$a^3 = 1000$$
$$3 a^2 b = 600$$
$$3 a b^2 = 120$$
$$b^3 = 8$$
$$1728 = (12)^3$$

§. 185.

Zus. Aus dieser Darstellung ergiebt sich, daß die niedrigste Ziffer von b^3 in eben derselben Ordnung ihre Stelle hat, in welcher b selbst ist. Die niedrigste Ziffer von $3 a b^2$ ist um eine Ordnung; die von $3 a^2 b$ um zwey, und die von a^3 um drey Ordnungen höher, als jene von b^3

§. 186.

Zus. Aus dem Wurzeltäfelchen (175) erhellet, daß der Würfel einer Zahl die unter Zehen ist, 1, 2, auch 3 Ziffern haben kann. Von 10 als der kleinsten Zahl mit 2 Ziffern, ist der Würfel

1000, eine Zahl die schon 4 Ziffern hat; von 99 ist der Würfel 970 299, welche aus 6 Ziffern besteht. Stellt man eben diese Untersuchung mit 100 und 999 an, so wird man finden, daß der Würfel der erstern aus 7, und der letztern ihrer, aus 9 Ziffern besteht, und so steigt die Anzahl der Ziffern vergleichungsweise immer um drey, wie die Potenz der 10 um eine Einheit höher wird; theilt man also eine Kubikzahl in Klassen von der Rechten zur Linken, und giebt jeder Klasse drey Ziffern, wo blos die äusserste zur Linken wieder auszunehmen ist, welche auch nur 2, oder Eine Ziffer enthalten kann, so wird wieder die Wurzel so viel Theile haben, als man Klassen bekommt.

§. 187.

Zus. Wenn man den Würfel von der 99 betrachtet, so enthält die Klasse rechter Hand, nemlich die 299, nichts vom Würfel der höhern 9 in der Zahl 99 (178). Die Klasse linker Hand, nemlich die 970 enthält aber ausser dem Würfel der höhern 9, noch Manches von $3a^2b$ u. s. w. Dieses alles zusammen beträgt aber doch noch nicht so viel, daß die Kubikwurzel in dieser linken Klasse um eine Einheit größer als 9, werden könnte, denn um zehn zu werden, müßte statt der 970, die Zahl 1000 darinn stehen, welches aber auch schon um deswillen nicht denkbar ist, weil alsdann diese Klasse mehr als 3 Ziffern haben müßte.

müßte. Die Wurzel dieser linken Klasse wird also der höchste Theil der ganzen Wurzel seyn. Ausser diesem läßt sich nun hier wieder die Betrachtung anstellen, die in (179) über Quadrate deren Wurzeln mehr als 2 Theile haben, angestellt wurde.

§. 188.

Aufg. Aus einer Zahl die vier und mehr Ziffern hat, die Kubikwurzel zu ziehen.

Aufl. 1) Man theile sie in Klassen nach (186).

2) Man suche die Zahl in der letzten Klasse zur Linken, oder die nächst kleinere im Wurzeltäfelchen unter den Kubikzahlen auf, und nehme die in der ersten Reihe über ihr stehende Zahl für den ersten Theil der gesuchten Wurzel an.

3) Die unter den Würfeln aufgesuchte Zahl ziehe man von den in der erwehnten Klasse befindlichen ab, und nehme zum Rest die Ziffern der nächsten Klasse.

4) Man nehme vom gefundenen ersten Theile der Wurzel das dreyfache Quadrat und schreibe es so unter die nach No. 3. am Ende erhaltenen Ziffern, daß die niedrigste Ziffer unter diejenige zu stehen kommt, welche in der heruntergenommenen

nen neuen Klasse die Dritte von der Rechten zu Linken ist.

5) Dieses dreyfache Quadrat sehe man als den ersten Theil eines Divisors an, und dividire damit in die eine oder mehreren Ziffern, welche nach No. 4. über ihm zu stehen gekommen sind. Der Quotient ist nicht allein der zweite Theil der Wurzel, sondern dient auch nebst dem ersten nach der gleich folgenden Anleitung, zur Ergänzung des Divisors.

6) Man nehme das dreyfache Product des ersten Theils der Wurzel in den zweiten, und setze es unter den ersten Theil des Divisors so, daß die niedrigste Ziffer dieses dreyfachen Products um eine Stelle weiter zur Rechten steht, als die niedrigste Ziffer des dreyfachen Quadrats vom ersten Theil; ferner setze man unter die vorigen Zahlen noch das Quadrat des zweiten Theils so, daß dessen niedrigste Ziffer um noch eine Stelle weiter zur Rechten als vorhin, zu stehen kommt.

7) Diese drey Bestandtheile des Divisors addire man nun zusammen, und multiplicire die Summe oder den ganzen Divisor mit dem neuen Theile der Wurzel und ziehe das Product von den nach Ende der No. 3. erhaltenen Ziffern ab; geht dieses nicht, so muß man den neuen Theil

Theil der Wurzel so lange um eine Einheit vermindern, bis es geht.

8) Wenn ein Rest bleibt, und noch eine Klasse vorhanden ist, so nimmt man wie in No. 3, die Ziffern der neuen Klasse noch zu ihm; sieht die beyden gefundenen Ziffern der Wurzel wieder zusammen als den ersten Theil an, und verfährt völlig so, wie in No. 4, 5, 6 und 7, so findet man nach und nach alle Theile der Wurzel.

Beweis. Die Regeln gründen sich überhaupt wieder wie bey voriger Aufgabe, auf die unmittelbar vorhergegangenen Zusätze. No. 4 bis 7 ergiebt sich besonders, wenn man die 3 letzten Glieder in der Formel (184) $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ in die beyden Factoren: $3a^2 + 3ab + b^2$, und b, zerlegt. Der Grund von No. 8 ist, daß von dem neuen Theil der Wurzel nicht alle Ziffern die durch denselben in den Würfel kommen, auch blos in der neuen Klasse vorhanden sind, sondern daß eben so, wie einige vom zweiten Theil in die erste Klasse kamen, itzt einige vom neuen dritten Theil mit in die zweite Klasse gekommen sind; diese müssen dann in Gestalt des erhaltenen Restes wieder zu den Ziffern der neuen Klasse zurückgegeben werden. Das weitere läßt sich am besten mündlich zeigen. Z. B. die Zahl sey:

K a b

				a b
				$\overbrace{a\ b}$:
1	8 6 0	8 6 7	1 2 3	
$a^3 = 1$				
$3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$	8 6 0			
$3a^2 =$	3			
$3ab =$	6			
$b^2 =$	4			
	3 6 4			
$(3a^2 + 3ab + b^2)b =$	7 2 8			
$3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$	1 3 2	8 6 7		
$3a^2 =$	4 3	2		
$3ab =$	1	0 8		
$b^2 =$		9		
	4 4	2 8 9		
$(3a + 3ab + b^2)b$	1 3 2	8 6 7		
		0		

§. 189.

Zus. Bliebe hier bey der letzten Klasse wieder ein Rest, so könnte man nach der Aehnlichkeit mit (181) noch eine Klasse von drey Nullen dazu nehmen und einen neuen Theil der Wurzel finden, welcher Zehntheilchen enthält, wenn der vorige Einer enthalten hat. Es ist nemlich anzusehen, als ob man die Zahl des Restes in Tausendtheilen ausgedrückt hätte;

hätte; da nun die Kubikwurzel von 1000, Zehn ist, so stellt der neue Theil der Wurzel einen Zähler vor, dessen Nenner 10 ist. Der folgende Theil wird dann Hunderttheilchen u. s. w. enthalten. Z. B.

```
  2 | 790 | 14, 07
  1 |     |
 ---|-----|
  1 | 790 |
    | 3   |
      12  |
       16 |
   -------|
     436  |
  1  744  |
 ---------|-----
      46  | 000 |
      58  | 8   |
     -----|-----|-----
      46  | 000 | 000
       5  | 880 | 0
          |  29 | 40
          |     |  49
     -----|-----|-----
       5  | 909 | 449
      41  | 366 | 143
     -----|-----|-----
       4    633   857
```

§. 190.

Anm. Es gilt hier eben das, was in (182) ist bemerkt worden.

§. 191.

Anm. Die Probe wird gemacht, wenn man die Theile der Wurzel erstlich mit sich selbst, und dann das Produkt nochmals mit denselben multiplicirt, und wenn ein Rest geblieben ist, solchen am Ende addirt. Da alsdann das Product wieder die Zahl mit den Nullen giebt, wenn dergleichen sind angehängt worden. Z. B.

```
                  -2
             1407
                  -2
             1407
           --------
             9849
          5628
        1407
        -----------
                  -4
        1979649
                 -2 :
             1407
      -------------
       13857543
      7918596
     1979649
     -------------
                  -6
     2785366143
Rest    4633857
     -------------
     2790,000000
```

§. 192.

Anm. Man kann die Formel in (184) auch für die 4te und folgenden Potenzen einrichten, wenn man sie aufs neue mit a + b multiplicirt. In der Algebra wo sie in ihrer algemeinsten Gestalt für alle Potenzen dargestellt wird, führt sie den Namen des Binomiums. Eine Biquadratwur-

zel

zel kann man überdem auch finden, wenn man erstlich die Quadratwurzel, und aus ihr eben dieselbe aufs neue wieder auszieht. (166)

§. 193.

Anm. Für nicht allzugroße Zahlen hat man die Quadrate und Würfel mit ihren Wurzeln in eigne Tafeln gebracht, die also bey diesen Rechnungen viel Bequemlichkeit gewähren; man muß sich aber auf ihre Correctheit verlassen können. Solche Tafeln können leicht durch die Addition verfertigt werden, wozu man die Regeln durch Anwendung der Buchstabenrechenkunst findet. Gesetzt man hat ein Quadrat mit seiner Wurzel und will das Quadrat für die folgende die um eine Einheit größer ist, finden, so setze man die erste Wurzel $= n$, und die nächste $n + 1$, so ist das Quadrat der erstern $= n^2$ und das der letztern $= n^2 + 2n + 1$ (171) Man ziehe nun das erstere von diesem n^2 letztern ab, so ist der Unterschied $= 2n + 1 = n + (n + 1)$.

Hieraus entspringt die Regel:

Man addire zu dem vor sich habenden Quadrate seine Wurzel und die des nächstfolgenden Quadrats welches man zu haben wünscht, und man wird es in dieser Summe erhalten. Z. B. man hätte die Wurzel 12 und ihr Quadrat 144, und wollte das von $12 + 1 = 13$ haben, so nimmt man $144 + 12 + 13 = 169 = (13)^2$. Für den Würfel nehme man $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ (184) und ziehe davon ab den Würfel von $n = n^3$

so ist der Unterschied $= 3n^2 + 3n + 1$

Dieser Unterschied läßt sich in die beyden Theile zerlegen 1) in $n^2 + 2n + 1$ und 2) in $2n^2 + n$ (wie man sieht, wenn man beyde wieder addirt) der erstere Theil aber, oder $n^2 + 2n + 1$ ist $= (n + 1)^2$ wie man vorhin gesehen hat; also kann man die Regel für die Erfindung des nächsten Würfels so abfassen: Man addire zum vor sich habenden Würfel erstlich das Quadrat von der Wurzel des nächstfolgenden, ferner das doppelte Quadrat von der Wurzel des vor sich habenden und endlich noch die Wurzel des vor sich habenden Würfels selbst, so giebt die Summe den verlangten nächsten Würfel. Z. B. Man hat den Würfel von $12 = 1728$ und will den von 13 haben;

$$\begin{array}{rcr} & & 1728 \\ (13)^2 & = & 169 \\ 2.(12)^2 & = & 288 \\ 12 & = & 12 \\ \hline & & 2197 = (13)^3 \end{array}$$

Wenn diese Rechnung bequem seyn soll, so muß man annehmen, daß die Quadrattafeln für die Wurzeln bereits vorhanden sind. Von solchen Tafeln und ihrem Gebrauch findet man am Ende des IV. Kap. der Kästn. Arithm. Nachricht.

§. 194.

Aufg. Aus einem Decimalbruche die Quadrat- oder Kubikwurzel zu ziehen.

Aufl.

Aufl. 1) Man theile die Zahl in Klassen, aber nicht wie oben (180, 188) von der Rechten zur Linken, sondern umgekehrt von der Linken zur Rechten, so daß der Abschnitt da geschieht, wo das Komma nach (138) zu stehen kommt, und gebe dann wieder bey der Quadratwurzel jeder Klasse 2, und bey der Kubikwurzel 3 Ziffern.

2) Wenn die letzte Klasse zur Rechten noch nicht die gehörige Anzahl von Ziffern enthält, so ergänze man die fehlenden Stellen mit Nullen.

3) Man verfahre dann völlig so wie in (180, 188).

Beweis. Wenn man die Wurzel wieder in Decimaltheilen haben will, so muß das Quadrat zum Nenner 100, und der Würfel 1000 haben, wenn die Wurzel Zehntheilchen enthalten soll u. s. w. Dies wird aber geschehen, wenn man nach der Vorschrift verfährt, wie aus der Natur der Decimalbrüche erhellet. Z. B. $\sqrt{0,436}$.

43	60	66=0, 66...
36		
7	60	
1	26	
7	56	
	4	

oder $\sqrt[3]{0,0538}$ steht so:

```
| 053 | 800 | 37=0,37 ...
|  27 |     |
-----------
|  26 | 800 |
|   2 | 7   |
      63
      49
  ---------
    3379
   23653
  ---------
    3147
```

Es ist übrigens für sich klar, daß man auch hier noch mehrere Decimaltheile in die Wurzel bekommen kann, wenn man an den Rest neue, aus bloßen Nullen bestehende Klassen hängt. (181, 189)

§. 195.

Anm. Da man die Wurzeln in (181 ꝛc.) weder in ganzen Einheiten, noch irgend einer Art von Theilen der Einheit völlig darzustellen im Stande ist (182), so kann man sagen, daß sie in gar keiner bestimmten Verhältniß zur Einheit stehen, und man nennt sie deshalb **Irrationalzahlen.** Wenn man sie nicht durch Näherung wie in (181 ꝛc.) ausdrücken will, so bezeichnet man sie so wie die Wurzelgrößen in (158) und rechnet auch so mit ihnen.

Von

Von den Verhältnissen.

§. 196.

Bisher sind die Zahlen immer nur an sich, d. . nach der ihnen zukommenden Menge von Einheiten oder Theilen der Einheit, betrachtet worden; es ist aber nicht weniger vortheilhaft auch mehrere gegen einander zu halten und dabey blos auf das Rücksicht zu nehmen was ihnen in dieser wechselseitigen Beziehung zukommt.

§. 197.

Erklär. Wenn man zwey gleichartige Zahlen oder Größen so gegen einander hält, daß man auf ihre Einerleyheit oder Verschiedenheit Rücksicht nimmt, so nennt man diese Vergleichung eine **Verhältniß** (ratio).

§. 198.

Erkl. Die verglichenen Größen werden **Glieder** der Verhältniß genennt, und man unterscheidet bey denselben das vorhergehende (antecedens) und das folgende (consequens).

§. 199.

Erklär. Eine Verhältniß heißt **arithmetisch** wenn man die Vergleichung so anstellt, daß man untersucht wie viel Einheiten in dem einen Gliede mehr oder weniger als in dem andern enthalten sind; **geometrisch** aber, wenn bey der Vergleichung das eine von beyden Gliedern selbst zum Maasstab genommen

nommen und untersucht wird, wie vielmal es in dem andern, oder was für ein Theil von ihm in dem andern enthalten ist. Z. B. wenn man 4 und 12 so gegen einander hält, daß man darauf Rücksicht nimmt, daß in 12 acht Einheiten mehr als in 4, oder in 4 acht weniger als in 12, enthalten sind, so betrachtet man sie in einer arithmetischen; hingegen wenn man bemerkt, daß 12 dreymal größer als 4, oder 4 der dritte Theil von 12 ist, so betrachtet man sie in einer geometrischen Verhältniß.

§. 200.

Zus. Es kommt also bey jeder Verhältniß nicht auf die Größe der Zahlen selbst, sondern blos auf die Größe ihrer Verschiedenheit an. Die Zahl welche dieselbe angiebt, wird der Name der Verhältniß genannt und bey der arithmetischen durch die Subtraktion gefunden, wo er besonders **Denominator** heißt. Bey der geometrischen hingegen geschieht dieses mittelst der Division und er heißt alsdann der **Exponent.**

§. 201.

Anm. Daß man die erstere Art der Verhältnisse, arithmetische genannt hat, kommt daher, weil die Vergleichung hier durch Abzählung der Einheiten, womit sich eigentlich die Arithmetik beschäftigt, geschieht. Bey der geometrischen hingegen geschieht die Vergleichung der beyden Zahlen auf eben die Art, wie man einen geometrischen Gegenstand z. B. eine Linie mit einer andern vergleicht,

gleicht, d. i. wo man untersucht wie vielmal sich die kleinere in der größern überschlagen läßt.

§. 202.

Zus. Da es bey Bestimmung der Größe einer Verhältniß blos auf die Größe der Zahl ankommt welche der Name derselben genannt wird, so hat man die arithmetischen eben so, wie in (122) die Differenzen, bezeichnet. Z. B. 12—4 und die geometrischen so, wie man, besonders ehedem, die Quotienten bezeichnete. Z. B. 12 : 4. Nachdem es aber gewöhnlich geworden ist, jede vorzunehmende Division und den dadurch erhaltenen Quotienten durch einen Bruch darzustellen, so kann man auch die Verhältnisse wie Brüche ausdrücken, wo das eine Glied den Zähler und das andere den Nenner abgiebt. Ausserdem aber müssen Verhältnisse und Quotienten oder Brüche, wohl von einander unterschieden werden.

§. 203.

Zus. Wenn man also bey einer geometrischen Verhältniß beyde Glieder durch einerley Zahl multiplicirt, oder dividirt, so wird dadurch diese Verhältniß nicht geändert (67) also $12 : 4 = 2.12 : 2.4 = \frac{12}{2} : \frac{4}{2}$.

§. 204.

Zus. Zwey Verhältnisse die einerley dritten gleich sind, sind auch einander selbst gleich; da man sich

nem-

nemlich dieselben als Brüche, mithin als Größen vorstellen kann (202), so folgt dieser Zus. mit aus (6). Z. B.

$$\begin{array}{rcl} 2 : 3 &=& 4 : 6 \\ 8 : 12 &=& 4 : 6 \\ \hline \text{also } 2 : 3 &=& 8 : 12 \end{array}$$

§. 205.

Aufg. Die Verhältniß zweyer Brüche durch ein paar ganze Zahlen auszudrücken.

Aufl. Wenn die Brüche gleiche Nenner haben, so sind ihre Zähler selbst die gesuchten Verhältnißzahlen; sind sie aber nicht von gleicher Benennung, so bringe man sie dazu (71).

Z. B. $\frac{3}{5} : \frac{2}{3} = \frac{9}{15} : \frac{10}{15} = 9 : 10$

oder $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{cb}{bd} = ad : cb$

Beweis. Wenn man bey den Brüchen die gleichen Nenner wegläßt, so ist es so viel als wären sie mit einerley Zahl, nemlich der des gemeinschaftlichen Nenners, multiplicirt worden (82).

§. 206.

Zus. Wenn zwey Brüche einerley Zähler haben, so verhalten sie sich verkehrt wie ihre Nenner; denn man setze, die Brüche seyen $\frac{a}{b} : \frac{a}{c}$ so verhalten sie sich wie $\frac{ac}{bc} : \frac{ab}{bc} = ac : ab$ (205) $=$ $c : b$ (203).

§. 207.

§. 207.

Erkl. Man pflegt auch die Verhältnisse einzutheilen, in Verhältnisse der Gleichheit und der Ungleichheit, je nachdem beyde Glieder einander gleich, oder nicht gleich sind. Letztere heißen wieder Verhältnisse der größeren oder kleineren Ungleichheit, je nachdem das größere oder das kleinere Glied das vorhergehende ist.

§. 208.

Zus. Von den Verhältnissen der Gleichheit muß man die gleichen Verhältnisse unterscheiden, welche allemal vorhanden sind, wenn zwey arithmetische Verhältnisse einerley Denominator, oder zwey geometrische einerley Exponenten haben.

§. 209.

Erkl. Eine Verhältniß heißt **rational** oder **irrational**, je nachdem der Denominator und Exponent eine Rational- oder Irrationalzahl ist. Z. B. $4 - \sqrt{12}$ ist eine arithmetische und $4 : \sqrt{12}$ eine geometrische Irrationalverhältniß.

§. 210.

Zus. Eine irrationale Verhältniß kann einer rationalen immer näher kommen, wenn man die Irrationalzahl, wie in (181 ꝛc.) durch Näherung ausdrückt. Z. B. da $\sqrt{12} = 3,46 \ldots$ so ist bey der Verhältniß $4 : \sqrt{12}$ der Exponent $= \frac{3}{4}$; näher: $\frac{3,4}{4}$ noch näher: $\frac{3,46}{4} = 0,86 \ldots$

§. 211.

Zus. Zwey Irrationalzahlen können eine Rationalverhältniß haben, denn bey $4\sqrt{12} : 8\sqrt{12}$ wird der Exponent = 2 seyn.

§. 212.

Anm. Die arithmetischen Verhältnisse kann man allgemein so darstellen; $a - a + d$; wo a das vorhergehende: $a + d$ das nachfolgende Glied, und d der Denominator ist. Daß das nachfolgende Glied als die Summe des vorhergehenden und des Denominators angesehen werden kann, erhellet unmittelbar aus dem vorigen allgemeinen Ausdruck, und wenn das nachfolgende kleiner als das vorhergehende ist, so kann man d als verneinend ansehen. Die geometrischen können in ihrer Allgemeinheit so ausgedrückt werden: $a : a e$, wo a wieder das vorhergehende, a e das nachfolgende und e der Exponent ist. Daß das nachfolgende ein Product aus dem ersten in den Exponenten ist, ergiebt sich wieder aus dem allgemeinen Ausdruck. Wenn das nachfolgende das kleinere Glied ist, so bedeutet e einen reinen Bruch.

§. 213.

Erkl. Verhältnisse deren Glieder aus Produkten bestehen, nennt man zusammengesetzte Verhältnisse und man sagt, sie seyen aus den Verhältnissen ihrer Factoren zusammengesetzt. Z. B. $a c : b d$ ist eine Verhältniß welche aus denen $a : b$ und $c : d$ zusammengesetzt ist.

§. 214.

Zus. Wenn in den Verhältnissen der Factoren ein folgendes Glied in der einen und ein vorhergehendes in der andern, einerley sind, so besteht die zusammengesetzte Verhältniß aus den übrigen Gliedern, die nicht einerley waren. Z. B.

$$\begin{array}{l} a : b \\ b : c \\ \hline ab : cb = a : c \ (203). \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} 1 : 3 \\ 3 : 9 \\ \hline 1 : 9 \end{array}$$

§. 215.

Zus. Wenn die einzelnen Verhältnisse einerley Exponenten haben, also einander gleich sind, so nennt man die zusammengesetzte, eine vervielfältigte, besonders eine verdoppelte (duplicata) wenn sie aus zwey; eine verdreyfachte (triplicata) wenn sie aus drey gleichen einzelnen zusammengesetzt ist. Z. B. wenn in (214) a = 1 und b eine Quadratwurzel bedeutet, auch $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, so ist c das Quadrat derselben (157), und 1 : c d. i. die Verhältniß der 1 zum Quadrat ist noch einmal so groß als die Verhältniß der 1 zur Wurzel. Auf gleiche Weise wird die Verhältniß der 1 zum Würfel eine dreymal größere, als die 1 zur Kubikwurzel seyn. Z. B. die Kubikwurzel sey = 3, also ihr Würfel 27, so hat man

$$\begin{array}{l} 1 : 3 \\ 3 : 9 \\ 9 : 27 \\ \hline \end{array}$$

also 1 : 27 welche aus 3 Verhältnissen, jede so groß als 1 : 3, zusammengesetzt ist.

§. 216.

§. 216.

Zus. Sieht man in (215) 1 : c als eine ganze Verhältniß an, so kann man in dieser Beziehung 1 : b die Hälfte derselben nennen, oder sie ist ratio subduplicata von der 1 zum Quadrat. Eben so ist 1 : 3 der dritte Theil (subtriplicata) von der 1 : 27.

§. 217.

Anm. Glieder zusammengesetzter Verhältnisse, kommen z. B. vor, wenn von Vergleichung zweyer Flächen oder zweyer Körper die Rede ist. Denn erstlich übertrift die eine Fläche die andere um so vielmal als die Länge der einen die Länge der andern übertrift und ausserdem aufs neue so vielmal, als die Breite der einen die Breite der andern übertrift. Wäre nun die Länge der einen Fläche der Länge der andern gleich, so wäre die Verhältniß der Längen wie 1 : 1, also würden die Glieder der zusammengesetzten noch dieselben seyn, als die Glieder welche die verschiedenen Breiten der Flächen vorstellen, und man sagt alsdenn wenn die Längen gleich sind, so verhalten sich die Flächen wie die Breiten, und so in ähnlichen Fällen. Ferner kommen auch zusammengesetzte Verhältnisse vor bey Dingen welche man als Ursachen ansehen kann, die in einem gewissen Zeitraum irgend eine Wirkung hervorbringen z. B. Kapitalien und Zinßen. Diese letztern werden nemlich einmal nach der Größe des Kapitals und dann auch noch nach der Länge der Zeit in der es ist benutzt worden, zu bestimmen seyn. Also sind hier die Glieder der zusammengesetzten Verhältniß Producte, aus der Größe der wirkenden Ursach in

die

die Länge der Zeit, wo sie gewirkt hat. Noch mehrere Fälle werden unten vorkommen.

Von den Proportionen.

§. 218.

Erkl. Wenn zwey gleiche Verhältnisse (208) durch das Zeichen der Gleichheit miteinander verbunden werden, so nennt man diese Zusammenordnung eine **Proportion**, welche **arithmetisch** oder **geometrisch** heißt, je nachdem die Verhältnisse arithmetisch oder geometrisch gewesen sind. Z. B. 4 — 12 = 5 — 13 oder 4 : 12 = 5 : 15.

§. 219.

Anm. Wenn von Verhältnissen und Proportionen überhaupt oder ohne Zusatz die Rede ist, so pflegt man allemal **geometrische** zu verstehen; besonders im ältern Sinne des Worts.

§. 220.

Erkl. Eine Proportion heißt **unterbrochen**, (proportio discreta) wenn alle 4 Glieder verschieden sind; **stetig** (continua), wenn das zweyte und dritte einerley sind. Die Beyspiele in (218) gehören zur erstern Art. Von letzterer ist 4 — 12 = 12 — 20 ein Beyspiel der **arithmetischen**, und 4 : 12 = 12 : 36 eins der **geometrischen**. Man kann die stetige so ausdrücken: daß das 2te und 3te Glied nur einmal vorkommt. Z. B. ÷ 4 — 12 — 20 und ÷ 4 : 12 : 36.

§. 221.

Lehrs. In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe des ersten und 4ten Gliedes so groß, als die des 2ten und 3ten.

Beweis. Man stelle die Glieder nach (212) im allgemeinen dar, z. B. a — (a + d) = c — (c + d). Nimmt man nun das erste und 4te Glied zusammen, so hat man a + c + d d. i. erstes, drittes und Denominator; beym 2ten und dritten aber gleichfalls a + c + d also müssen beyde Summen gleich seyn. Z. B. bey 4 — 12 = 5 — 13 ist 4 + 13 = 12 + 5 = 17.

§. 222.

Zus. Bey der stetigen wird also die Summe des ersten und vierten dem Duplum des mittlern gleich seyn, denn ihr allgemeiner Ausdruck wird seyn: a — (a + d) = (a + d) — (a + 2 d). Kommt also das erste Glied a, noch zum 4ten, so erhält man 2 a + 2 d = 2. (a + d) (132) oder das Beyspiel in (220) gebraucht 4, + 20 = 2. 12

§. 223.

Anm. Man nennt das 1ste und 4te Glied zusammen die äussern, und das 2te und 3te die innern; die beyden ersten aber und beyden letzten, jedes Paar besonders, die gleichnahmigen.

§. 224.

§. 224.

Aufg. Aus drey gegebenen Gliedern einer arithmetischen Proportion das 4te zu finden.

Aufl. 1) Wenn ein äusseres gesucht wird, so addire man die innern und subtrahire von der Summe das gegebene äussere, so ist der Rest das gesuchte.

2) Wenn ein inneres gesucht wird, so addire man die äussern, und subtrahire von der Summe das innere, so ist wieder der Rest das gesuchte.

Z. B. Es ist aus (221) gegeben: 4, 12, 5 man sucht das 4te, so ist $12 + 5 = 17$ und $17 - 4 = 13$. Oder es fehlt das zweite, und ist gegeben 4, 5, 13 so hat man $4 + 13 = 17$ und $17 - 5 = 12$.

Bew. Es sey die

Proportion $m - n = p - q$

so ist $m + q = n + p$ (221)

man subtrahire beyderseits $m = m$

so ist: $q = n + p - m$ (49)

Auf ähnliche Art läßt sich auch der Beweis für die übrigen Fälle führen.

§. 225.

Zus. Wenn bey der stetigen Proportion das erste oder letzte Glied fehlt, so zieht man vom Doppelten des mittlern das letzte oder erste ab; und wenn das mittelste fehlt, so halbirt man die Summe

me des ersten und letzten. Denn es sey die Proportion : $\div$ x — y — z
so ist x + z = 2 y (222)
Man halbire beyderseits, so ist $\frac{x + z}{2}$ = y (49) u. s. w.

§. 226.

Anm. Aus der letzten Formel läßt sich eine Regel für solche Fälle machen, wo man aus zwey bekannten aber nicht zuverläßigen Werthen, von welchen man vermuthet, daß der eine über, und der andere unter dem richtigen sey, einen mittlern findet, welcher der Richtigkeit näher als jene, zu seyn scheint.

§. 227.

Lehrs. In einer geometrischen Proportion ist das Product der beyden innern Glieder so groß, als das Product der beyden äussern.

Erster Beweis: Man stelle sie im allgemeinen nach (212) dar, nemlich a : ae = b : be, so bekommt man bey Multiplicirung der beyden äussern ein Product welches aus den drey Factoren a, b und e, d. i. aus dem ersten und dem dritten Gliede nebst dem Exponenten besteht. Bey Multiplicirung der innern aber erhält man im Product eben dieselben Factoren, mithin auch eben dasselbe Product z. B. wenn 4 : 12 = 5 : 15, so ist 4 . 15 = 12 . 5 = 60.

Anderer Beweis: Man drücke die beyden gleichen Verhältnisse, welche die Proportion ausmachen,

als Brüche aus. Wenn z. B. die Glieder der Proportion wären: $m : n = p : q$

so setze man $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ (202) man bringe

beyde Brüche unter einerley Benennung $\frac{mq}{nq} = \frac{np}{nq}$

Man multiplicire beyderseits durch qn so kommt $mq = np$

§. 228.

Zus. Bey der stetigen wird also das Produkt der äussern Glieder dem Quadrat des mittlern gleich seyn. Ihr allgemeiner Ausdruck wird nemlich seyn $a : ae = ae : ae^2$ also $a \cdot ae^2 = a^2 e^2 = (ae)^2$

§. 229.

Lehrs. Aus 2 paar Factoren zweyer gleichen Producte läßt sich jedesmal eine geometrische Proportion machen, bey welcher das Product der äussern Glieder das eine, und das der innern, das andere, von jenen Producten giebt.

Erster Beweis: Die beyden Producte seyen $mq = np$ und die Größen in der Ordnung wie sie als Glieder der Proportion stehen sollen: m, n, p, q. Man multiplicire p und q durch m, so erhält man mp und mq und es ist $mp : mq = p : q$ (203); man setze in dieser Proportion statt mq das ihm gleiche np, so hat man folgende: $mp : np = p : q$ man dividire die Glieder der ersten Verhältniß durch p, so kommt: $m : n = p : q$.

Anderer Beweis. Es seyen die Producte $mq = np$; man dividire beyde durch nq, so wird $\frac{mq}{nq} = \frac{np}{nq}$ (48). Man hebe den ersten Bruch mit q und den andern mit n auf, so kommt $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$; drückt man nun diese Brüche wieder als Verhältnißglieder aus, wie in (202), so erhält man $m : n = p : q$. Es wird nemlich angenommen, daß wenn es verstattet ist, Verhältnisse als Brüche auszudrücken, es auch hinwiederum angehe, Zähler und Nenner der Brüche als Verhältnißglieder anzuordnen. Der Grund hievon liegt in (59, 200).

§. 230.

Zus. Da jede Zahl als ein Product anzusehen ist welches 1 und sich selbst zu Factoren hat, so kann man, wenn sie keine Primzahl ist und folglich noch ein paar andere, eigentliche Factoren hat, allemal eine geometrische Proportion aus ihr bilden z. B. 15 besteht aus 1. 15 und auch aus 3. 5 und es ist $1 : 3 = 5 : 15$ oder bey dem Product ab wird $1 : a = b : ab$ d. i. bey jedem Product verhält sich die Einheit zum einen eigentlichen Factor, wie der andere zum Product; welches auch mit (36) übereinstimmt. Sieht man ab als einen Dividend; a als den Divisor und b als den Quotienten an, so kann man sagen, 1 verhalte sich eben so zum Divisor, wie der Quotient zum Dividend; oder wenn a den Quotienten und b den Divisor vorstellt,

1 zum

ı zum Quotienten, wie der Divisor zum Dividend (42).

§. 231.

Lehrsatz. Wenn 4 Glieder einer geometrischen Proportion, wie a : ae = b : be auf folgende Weise verändert werden, so machen sie auch dann noch eine geometrische Proportion.

I. rückwärts: ae : a = be : b.

II. verwechselt a : b = ae : be

III. die vorhergehenden und folgenden Glieder summirt; a + b : ae + be = a : ae

oder sie von einander abgezogen:

a — b : ae — be = a : ae

IV. Umgekehrt:

a : a + ae = b : b + be

oder a : a — ae = b : b — be

V. Zusammengesetzt:

a + ae : ae = b + be : be

oder getheilt: a — ae : ae = b — be : be

VI. Zu Potenzen erhoben, oder Wurzeln ausgezogen.

$$a^n : a^n e^n = b^n : b^n e^n$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{e} = \sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{b}\sqrt[n]{e}$$

VII. Jedes der 4 Glieder mit dem ihm entsprechenden Gliede einer andern geometrischen Proportion multiplicirt, oder dividirt

$$\begin{array}{rcl} a : ae & = & b : be \\ m : mn & = & q : qn \\ \hline am : aemn & = & bq : beqn \end{array}$$

Beweis. In allen diesen Fällen geben die beyden äussern Glieder eben dasselbe Product als die beyden innern, folglich sind die Glieder in einer geometrischen Proportion (229).

§. 232.

Anm. Beweise für solche Sätze, nach Art der in (229) mit beygebrachten, findet man im Vten Kap. der Kästn. Arithm. Man pflegt sonst unter diesen Fällen auch noch den mit anzuführen, wo ein paar gleichartige Verhältnißglieder mit einerley dritten Zahl multiplicirt oder dividirt werden, er ist aber schon in (203) vorhanden.

§. 233.

Zus. Wenn $a : b = c : d$ oder $a : b = c : d$
und $b : f = d : h$ — $b : f = h : c$
so ist $a : f = c : h$ — $a : f = h : d$

Dies folgt aus (231 VII. u. 203); die erste dieser Formen ist unter dem Ausdruck: ordinatim et ex aequo und die andere unter dem: perturbate et ex aequo, bekannt.

§. 234.

Aufg. Aus den ersten 3 gegebenen Gliedern einer geometrischen Proportion das 4te zu finden.

Aufl. Man multiplicire das 2te mit dem 3ten und dividire das Product durch das erste, so ist der Quotient das 4te. Z. B. Die 3 ersten seyen: a, b, c, so ist das 4te $= \frac{bc}{a}$ oder: die ersten seyen 2, 3, 4, so ist das 4te $= \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$.

Beweis. Man nenne das gesuchte vierte einstweilen x, so ist $a : b = c : x$

$$ax = bc \quad \text{nach (227)}$$

$$\text{div. d. a)} \quad x = \frac{bc}{a} \quad \text{nach (48)}$$

§. 235.

Anm. Da man nach (231) jedes der 4 Glieder zu einem letzten machen kann, so gilt diese Auflösung auch für solche Fälle, wo das 1ste, 2te, oder 3te Glied aus den übrigen gefunden werden soll.

§. 236.

Anm. Diese Auflösung heißt die **Regel de tri**, oder auch wegen ihres weit ausgebreiteten Nutzens, die **goldne** Regel. Man theilt sie in die **ordentliche oder directe**, und in die **verkehrte**. Die erstere kommt bey solchen Fällen vor, wo man im allgemeinen sagen kann: Je mehr dies, desto mehr jenes; oder auch je weniger dies, desto weniger jenes. Z. B. Je mehr Arbeit,

desto mehr Lohn. Die verkehrte hingegen hat statt, wenn man sagen muß: je mehr dies, desto weniger jenes; oder auch je weniger dies, desto mehr jenes. Z. B. Je mehr Leute an einer Arbeit sind, desto weniger brauchen sie Zeit zu deren Vollendung. Die erstere wird deswegen die ordentliche genannt, weil man bey ihr die beyden gleichnahmigen Verhältnißglieder in eben der Ordnung, wie sie in der Aufgabe genannt werden, in Ansatz bringen kann. Z B. 5 ℔ kosten 20 Rthlr. wie viel kosten 6 ℔; hier setzt man: 5 ℔ : 6 ℔ = 20 Rthlr. : $\frac{6.\ 20}{5}$ = 24 Rthlr.

Die verkehrte aber hat ihren Namen daher, daß man in den für sie gehörigen Fällen die beyden gleichnahmigen Glieder in umgekehrter Ordnung ansetzen muß, wenn die Aufgabe nach der natürlichen Art zu reden vorgetragen wird. Z. B. Wenn der Scheffel Korn 2 Rthlr. gilt, so wiegt das Groschenbrod 3 Pfund; wie viel wird es wiegen müssen, wenn der Scheffel 1 Rthlr. kostet? Hier muß man setzen: 1 Rthlr. : 2 Rthlr. = 3 Pfund : $\frac{2 \cdot 3}{1}$ = 6 Pfund.

§. 237.

Anm. Man muß beym Gebrauch der Regel de tri noch auf folgende Punkte Rücksicht nehmen.

I. Man darf sie nie anbringen, als wo wirklich eine Proportion unter den in der Aufgabe vorkommenden Dingen vorhanden ist. Z. B. Wenn aus einem Fasse, das nicht beständig voll gehalten wird, in 1 Min. 2 Kannen herausgelaufen sind, so werden nicht in 10 Min. 10mal 2 Kannen,

nen, sondern weniger, herausgelaufen seyn, weil mit der Abnahme des obern Drucks auch die Geschwindigkeit des Laufens abnimmt.

II. Es müssen allemal 2 Größen gleichartig seyn, und die dritte muß sich auf eine dieser gleichartigen eben so beziehen, wie sich die gesuchte 4te auf die andere beziehen soll. Z. B. 5 Pf. kosten 4 Rthlr. wie viel kosten 3 Centner? Hier sind die 5 Pfund und 3 Centner nicht ganz gleichartig, und man muß deshalb erst eine Reduction vornehmen, ehe man die Regel de tri anwendet, dies kann geschehen, entweder wenn man nach (99) die Centner in Pfund; oder nach (95) die Pfund in Centner verwandelt; nemlich

$$5 \text{ Pf.} : 300 \text{ Pf.} = 4 \text{ Rlr.} : \frac{4 \cdot 300}{5} \text{ Rlr.} = 240 \text{ Rlr.}$$

$$\text{oder } \tfrac{1}{20} \text{ C.} : 3 \text{ C.} = 4 \text{ Rlr.} : \frac{3 \cdot 4 \cdot 20}{1} \text{ Rlr.} = 240 \text{ Rlr.}$$

III. Wenn mehr oder weniger als 3 Zahlen in der Aufgabe vorkommen, so muß sie sich so einkleiden lassen, daß nicht mehr als 3 Zahlen erscheinen, sonst kann die Regel de tri nicht angebracht werden. Z. B. Wenn Jemand täglich 2 Rthlr. verzehrt, wie viel wird er jährlich brauchen; dies muß so eingekleidet werden: 1 Tag : 365 Tagen = 2 Rthlr. : $\frac{2 \cdot 365}{1}$ = 730 Rthlr. oder: in 1 Mühle welche 2 Gänge hat, können in 3 Tagen 20 Scheffel gemahlen werden, wie viel werden in eben der Zeit in einer andern gemahlen werden können, welche 5 Gänge hat? hier wird so wohl die 1 bey der Mühle als die 3 bey den Tagen ganz aus der Rechnung gelassen, weil diese Dinge für beyde Fälle, einerley sind, also die Verhältniß nicht ändern, und die Rechnung steht so:

so: 2 Gänge : 5 Gängen = 20 Schffl. : $\frac{5 \cdot 20}{2}$ = 50 Scheffel, oder: 100 Rthlr. bringen in 1 Jahr 5 Rthlr. Zinß, wie viel werden 30 Rthlr. 16 gr. 6 pf. in dieser Zeit bringen? Hier machen die 100 Rthlr. das erste; die 30 Rthlr. 16 gr. 6 pf. nach geschehener Reduction (entweder zu lauter Pfennigen oder zu lauter Rthlr. wo die 16 gr. 6 pf. einen Bruch vom Thaler machen) das zweite und die 5 Rthlr. Zinß als ungleichartig mit den vorigen, das dritte Glied aus, und die Rechnung steht so:

100 Rthlr. : 30 Rthlr. 16 gr. 6 pf. = 5 Rthlr.

24	24
2400	736
12	12
4800	1478
24	736
28800 Pfn.	8838 Pfn. = 5 Rlr. = $\frac{5 \cdot 8838}{28800}$ Rlr.

oder: Da 16 gl. 6 pf. = 16 $\frac{1}{2}$ gl. = $\frac{33}{2}$ gr. (64) = $\frac{33}{2 \cdot 24}$ Rthlr. (99) = $\frac{11}{16}$ Rthlr. so hat man: 100 Rthlr. : 30 $\frac{11}{16}$ Rthlr.

oder 100 Rlr. : $\frac{491}{16}$ Rlr. = 5 Rlr. : $\frac{5 \cdot 491}{100 \cdot 16}$ Rlr. = $\frac{491}{20 \cdot 16}$ = 1 $\frac{171}{320}$ Rthlr.

Den am Rthlr. hängenden Bruch $\frac{171}{320}$ kann man nach (99) zu Groschen machen, neml. $\frac{171 \cdot 24}{320}$ = 12

$= 12 \frac{264}{320}$ gr. und auf ähnliche Art kann man den Bruch vom Groschen in Pfennige verwandeln.

§. 238.

Anm. Wenn das dritte Glied aus einander untergeordneten Zahlen, die beyden erstern aber aus kleinen, oder doch in kleine Factoren zerfällbaren Zahlen besteht, so braucht man die Reduction nicht, und kann nach (100) verfahren. Z. B. 12 Pfund kosten 10 Rthlr. 6 gr. 4 pf. wie viel 105 Pf? also: 12 : 105 = 10 Rr. 6 gl. 4 pf. 5

oder nach (203) 3) 4 : 35   51 Rr. 7 gl. 8 pf. X mult.

359 Rr. 5 gl. 8 pf. 7

div. 4) 89 Rr. 19 gl. 5 pf. Der verlangte Betrag.

§. 239.

Anm. Diese und ähnliche Abkürzungen, pflegt man die **welsche Practik** zu nennen und in practischen Rechenbüchern eine Menge Beyspiele aufzuführen bey welchen sie angebracht werden kann. Unmathematischen Köpfen beschweren sie nur das Gedächtniß und mathematische erfinden sie aus der Theorie leicht selbst.

§. 240.

Anm. Wenn die Rechnung aus zusammengesetzten Verhältnissen geführt werden muß, so kann man statt derselben auch die einzelnen Verhältnisse brauchen aus welchen sie zusammengesetzt sind. Sind dieser einzelnen Verhältnisse zwey, so werden sie nebst dem einzelnen Gliede welches mit dem gesuchten gleichnahmig ist, fünf Glieder in den Ansatz

satz bringen; davon hat die Regel für solche Aufgaben den Namen **Regel de quinque** erhalten. Man verfährt bey ihr so, daß man erstlich aus der einen von beyden Verhältnissen allein, nebst dem einzelnen Gliede, das vierte sucht; dieses vierte Glied ist sodann bey der Anwendung der andern von den beyden Verhältnissen wieder als das einzelne, oder dritte Glied anzusehen; und das zu diesem abermals gefundene vierte wird die aus der zusammengesetzten Verhältniß zu berechnende Zahl seyn. Wenn man aber wie in (234) die bey der Rechnung zu machenden Producte und Quotienten vorläufig durch Factoren ausdrückt, so wird es sehr in die Augen fallend, wie die Regel de tri-Rechnung aus einer zusammengesetzten Verhältniß, mit der, wo die Regel de tri zweymal hintereinander angewandt wird, übereinstimmt. Z. B. Ein Capital von 100 Rthlr. giebt in 1 Jahr 5 Rthlr. Zinß, wie viel geben 250 Rthlr. in 8 Jahren? Hier bestehen die Verhältnißglieder nach welchen der Zinß berechnet wird, aus den Producten der Capitalien in die Zeiten des Ausstehens derselben (217), also stünde die Rechnung so: $100.\ 1 : 250.\ 8 = 5$ Rthlr. : $\frac{250.\ 8.\ 5.}{100.\ 1.}$

Nimmt man aber die Sache so, daß man sich anfangs vorstellt, das andere Capital habe eben so lange ausgestanden als das erste, so hat man

100 Kapit. : 250 Kap. = 5 Zinß : $\frac{250.\ 5.}{100}$ Zinß

und nun berichtigt man diesen Zinß weiter nach Maaßgabe der verschiedenen Zeiten, so wird:

1 Jahr : 8 Jahren = $\frac{250.\ 5.}{100}$ Zinß : $\frac{8.\ 250.\ 5.}{1.\ 100.}$

wie vorhin. Wenn oben und unten aufgehoben wird, so erhält man den gesuchten Zinß = 100 Rthlr.

§. 241.

Anm. Kommen noch mehr als 2 Verhältnisse vor, so kann man ganz auf dieselbe Weise verfahren. Die Regel hiezu hat man die Regel Multiplex genannt. Z. B. 10 Maurer haben in 15 Wochen, worinn sie 6 Tage, und täglich 12 Stunden arbeireten, eine Mauer verfertigt, welche 400 Fuß lang 12 Fuß hoch $3\frac{1}{2}$ Fuß dick war; wie viel Wochen werden 24 Maurer zubringen, wenn die Mauer 160 Fuß lang, 14 Fuß hoch, $2\frac{1}{2}$ Fuß dick ist, wöchentlich aber nur 5 Tage und täglich 10 St. gearbeitet wird. Wenn man die Verhältnisse in dieser Aufgabe nach (236) einzeln untersucht, so findet man, daß diejenigen welche die Zahl der Arbeiter, und die Zeiten in welchen sie gearbeitet haben, betreffen, verkehrt; diejenigen aber welche die Abmessungen der Mauer betreffen, ordentlich, oder direct sind; wenn man nun noch die ganzen Zahlen woran Brüche hängen nach (64) ausdrückt, so wird man folgenden Ansatz erhalten:

M. M.	=	W.	;	$\frac{10.\,15}{24}$ Wochen
24 : 10		15		
T. T.	=	$\frac{10.\,15}{24}$	;	$\frac{6.\,10.\,15}{5.\,24}$
5 : 6				
St. St.	=	$\frac{6.\,10.\,15}{5.\,24}$	;	$\frac{12.\,6.\,10.\,15}{10.\,5.\,24}$
10 : 12				
Lang L.	=	$\frac{12.\,6.\,10.\,15}{10.\,5.\,24}$	;	$\frac{160.\,12.\,6.\,10.\,15}{400.\,10.\,5.\,24}$
400 : 160				
H. H.	=	$\frac{160.\,12.\,6.\,10.\,15}{400.\,10.\,5.\,24}$	;	$\frac{14.\,160.\,12.\,6.\,10.\,15}{12.\,400.\,10.\,5.\,24}$
12 : 14				
Dick. D.	=	$\frac{14.\,160.\,12.\,6.\,10.\,15}{12.\,400.\,10.\,5.\,24}$	;	$\frac{2.\,5.\,14.\,160.\,12.\,6.\,10.\,15}{7.\,2.\,12.\,400.\,10.\,5.\,24}$
$\frac{7}{2}$: $\frac{5}{2}$				

Dies

Dies giebt nach dem Aufheben: 3 Wochen. Die jedesmaligen vierten Glieder welche hernach wieder in die 3te Stelle kommen, braucht man bey praktischen Arbeiten nicht wirklich hinzuschreiben, es ist hier blos zu dem Ende geschehen, um es in die Augen fallend zu machen, daß die verlangte Zahl als ein Bruch anzusehen ist, dessen Zähler das Product aus allen zweiten Gliedern nebst dem dritten, und der Nenner ein Product aus allen ersten Gliedern ist. Man könnte deshalb auch das Aufheben sogleich mit den im Ansatz stehenden Zahlen selbst vornehmen. Von den Brüchen müßte man übrigens vor dem Aufheben die Nenner aus der zweiten und dritten Reihe in die erste, und die aus der ersten in die zweite, setzen, die Zähler aber unversetzt lassen. Die in manchen praktischen Rechenbüchern vorkommende **Reesische Regel** beruht auf diesen Gründen.

§. 242.

Anm. Rechnungen dieser Art kommen auch bey den Reductionen der Münzen, Maaße und Gewichte vor, wo die Vergleichung zwischen zweyen durch mehrere Mittelvergleichungen bewerkstelligt wird. Z. B. Man will wissen wie viel Mariengroschen auf 1 Dukaten gehen. Gesetzt nun man wisse, daß 3 Mariengr. 2 guten gr.; 16 ggr. 1 Gulden; 3 Gulden 2 Rthlr. und 11 Rthlr. 4 Dukaten betrügen, so könnnte man den Ansatz so machen:

2 ggr.	16 ggr.	=	3 Mgr.	:	$\frac{3.16}{2}$
1 fl.	3 fl.	=	$\frac{3.16}{2}$	:	$\frac{3.3.16}{1.2}$
2 Rhr.	11 Rhr.	=	$\frac{3.3.16}{1.2}$	:	$\frac{11.3.3.16}{2.1.2}$
4 Duk.	1 D.	=	$\frac{11.3.3.16.}{2.1.2}$	:	$\frac{1.11.3.3.16.}{4.2.1.2.}$

welcher Bruch nach dem Aufheben 99 Mgl. giebt.

Man

Man pflegt aber auch diese Rechnungen so anzuordnen daß man die erste Verhältniß mit eben der Münzsorte anfängt von welcher die Frage ist und dieselbe mit einer andern vergleicht, mit welcher die folgende Verhältniß wieder angefangen und dieselbe mit einer dritten verglichen wird, so daß jede Verhältniß mit eben der Sorte anfängt, mit welcher die vorige aufhört, bis man auf diejenige Sorte kommt in welcher die Antwort stehen soll. Z. B.

4 Duk.	11 Rthlr.
2 Rthlr.	3 fl.
1 fl.	16 ggr.
2 ggr.	3 Mgr. = 1 Duk.

Dividirt man nun wieder das Product aller zweiten Glieder nebst dem dritten, durch das Product aller ersten, so erhält man auch wieder die verlangte Zahl. Wegen dieses Zusammenhangs des vorhergehenden letzten Gliedes mit den nachfolgenden ersten, hat man dieses Verfahren die **Kettenrechnung** genannt.

§. 243.

Zus. Noch eine Anwendung der Regel Detri kommt vor, wenn irgend ein Ganzes und einer seiner Theile nebst noch einem andern Ganzen gegeben ist, zu welchem derjenige Theil verlangt wird, der sich eben so zu ihm verhält, wie jener erstere Theil zu seinem Ganzen. Z. B. es hat Jemand an einem Kapital von 1000 Rthlr. einen Antheil von 300 Rthlr. wenn nun mit jenem Kapital 80 Rthlr. wären gewonnen worden, wie viel würde dem, der jenen Antheil hatte, davon zukommen müssen? Es ist natürlich, daß dieser Gewinn ein eben so

großes Stück von den 80 Rthlr. seyn muß, als 300 Rthlr. von den 1000 sind, also setzt man: $1000 : 300 = 80 : \frac{80.\ 300}{1000} = 24$ Rthlr.

Ausser jenen 300 können nun noch verschiedene andere Personen an den 1000 Rthlr. Antheil haben die sich zusammen bis auf 700 Rthlr. belaufen, und ihre Antheile am Gewinn lassen sich auf eben die Art berechnen; man braucht nur die Regel Detri so vielmal anzuwenden, als Antheile vorhanden sind.

§. 244.

Anm. Man sieht, daß diese Rechnung gebraucht werden kann, wenn mehrere in einer Gesellschaft sich befindende Personen einen Gewinn und Verlust nach Proportion einer gewissen Theilnahme bestimmen wollen. Sie wird deshalb auch die Gesellschaftsrechnung genannt. Man pflegt sie in die einfache und zusammengesetzte einzutheilen, je nachdem die Theilnahme einfach oder zusammengesetzt ist. Z. B. wenn das vorhin erwehnte Kapital von 1000 durch drey Interessenten ist zusammen geschossen worden, von welchen der erste 300; der zweite 400 und der 3te 500 gegeben, und einer sein Geld so lange als der andere in der Handlung gelassen hat, so werden die Antheile am Gewinn nach der einfachen Gesellschaftsregel berechnet; hätte aber der erste seine 300 Rthlr. 2 Jahre; der zweite seine 400 Rthlr. 1 Jahr und der dritte seine 500 Rthlr 3 Jahre in der Handlung gelassen, so muß nothwendig auf diese Zeiten bey der Theilnahme mit Rücksicht genommen werden. Dieses geschieht, wenn man nach

(217) die Zahl des Kapitals in die Zahl der Zeit multiplicirt, denn ein Antheil von 300 Rthlr. auf 2 Jahre, wird eben so anzusehen seyn, als einer von 2. 300 oder 600 Rthlr. auf 1 Jahr ꝛc. Auf solche Art reducirt man die sämmtlichen Zeiten auf 1 und nun kann man wieder wie bey der einfachen Gesellschaftsrechnung verfahren. Es sind nemlich die Zahlen der Theilnahme.

$$\begin{array}{r} 600 \\ 400 \\ 1500 \\ \hline \end{array}$$

das Ganze 2500 also: $2500 : 600 = 80 : \frac{600.\ 80}{2500}$ u. s. w.

§. 245.

Zus. Wenn man bey einer zusammengesetzten Sache weiß, wie sich ein gewisser Bestandtheil derselben zur ganzen zusammengesetzten Sache verhält, so kann man wie vorhin finden, wie viel sein ähnlicher Bestandtheil bey einer andern zusammengesetzten Sache betragen muß, die im Ganzen mehr oder weniger, als die vorige beträgt. Diese Rechnung nennt man deshalb die Alligations- oder Vermischungsrechnung. Z. B. wenn man 42 Loth Schießpulver hat, so beträgt der dabey befindliche Salpeter 1 ℔ oder 32 Loth wie viel wird er betragen, wenn man 100 ℔ Schießpulver haben wollte? dies gäbe 42 L. : 32 L. = 100 ℔ : $\frac{32.\ 100}{42}$ ℔.

Eben so können auch die Antheile von Schwefel und Kohlen berechnet werden.

§. 246.

Zus. Eine andere Art von Vermischungsrechnung, wo auch die Regel Detri gebraucht wird, kommt vor, wenn man mehrere Dinge von einerley Art aber verschiedenem Werthe und verschiedener Menge zusammenmischt, und nach dem mittlern Werthe fragt. Z. B. es hat Jemand 20 Maas Rheinwein wo das Maas 12 gl. kostet und 30 Maas wo das Maas 16 gr. kostet, wie viel wird 1 Maas vom vermischten Werth seyn.

Hier hat man: 1 : 20 = 12 gr. : 10 Rthlr.
ferner 1 : 30 = 16 — : 20 Rthlr.

also 50 Maas 30 Rthlr. folglich 1 Maas $\frac{3}{5}$ Rthlr.

§. 247.

Zus. Wenn man die Frage so stellt: Es sind 2 gleichartige Dinge von verschiedenem Werthe vorhanden, wie viel muß man von jedem nehmen, damit das vermischte einen gegebnen Mittelwerth erhalte. Z. B. 1 Maas Rheinwein kostet 12 gr. ein anderes 18 gr. wie viel ist von jedem nöthig um 1 Maas zu erhalten welches 16 gr. werth ist? Um hierzu eine allgemeine Regel zu finden, nenne man das Maas = 1 den Werth der bessern Sorte = a; den der geringern b und den gegebnen mittlern = c; den Theil eines Maaßes der von der bessern Sorte genommen werden muß = x so wird der

von

von der geringern Sorte seyn $= 1 - x$ nun sage man nach der Regel Detri

1 M. kostet a, wie viel x Maas? a x. Ferner: 1 M. kostet b, wie viel $1 - x$ Maas? $b - bx$, diese beyden Werthe sollen nun nach Innhalt der Frage zusammen den gegebnen Mittelwerth eines Maaßes, nemlich c, ausmachen,

also kann man setzen: $c = ax + b - bx$

man subtrahire auf beyden Seiten b, so hat man $c - b = ax - bx$

Man zerfälle das was rechter Hand des Gleichheitszeichens steht, in Factoren (132) $c - b = (a - b)\,x$

Man dividire beyders. d. $a - b$, so erhält man $\frac{c - b}{a - b} = x$

Sieht man den Bruch linker Hand an, als wäre er in 1 multiplicirt, so kann man aus der gefundenen Formel folgende geometrische Proportion machen: $a - b : c - b = 1 : x$ und es läßt sich sonach der Antheil von der bessern Sorte durch die Regel Detri finden, wenn man zum ersten Glied die Differenz zwischen dem größten und kleinsten; zum zweiten die zwischen dem mittlern und kleinsten Werth und zum dritten die Einheit nimmt. In den Zahlen des Beispiels wird $x = \frac{2}{3}$ folglich $1 - x = \frac{1}{3}$. Es beträgt aber auch wirklich $\frac{2}{3}$ Maas à 18 gr. — — 12 gr.
und $\frac{1}{3}$ Maas à 12 gr. — — 4 gr.

folglich 1 Maas vermischter — 16 gr.

§. 248.

Zus. Sollte man statt Eines Maaßes gemischten eine Menge derselben finden, so läßt sich abermals die Regel Detri gebrauchen. Z. B. man verlangte 100 Maas à 16 gr. wie viel Maas à 18 gr., und wie viel à 12 gr. müßten dazu genommen werden? Nach (247) gehören zu 1 Maas $\frac{2}{3}$ des bessern, also zu 100 M. $\frac{100 \cdot 2}{3} = 66\frac{2}{3}$ folglich vom geringern das was an 100 fehlt, nemlich $33\frac{1}{3}$. Diese Rechnungen werden auch zu Beschickung des Tiegels bey Metallkompositionen und dergl. angewendet.

§. 249.

Zus. Wenn eine gegebene Zahl in verschiedene Theile soll getheilt werden, von welchen man blos die Verhältnisse angiebt, so läßt sich, um die Größe jedes Theils selbst zu finden, ebenfalls die Regel Detri anbringen. Z. B. ein Vater hat 3 Söhne welchen er ein Vermögen von 1000 Rthlr. hinterläßt, darein sollen sie sich so theilen, daß der mittelste Bruder doppelt so viel als der älteste, und der jüngste wieder doppelt so viel als die beyden älteren zusammen, erhalte. Man nehme hier an, um die Verhältnisse in Ziffern zu bestimmen, der älteste bekomme 1 Rthlr. so wird der mittlere 2 Rthlr. und der jüngste 6 Rthlr. erhalten. Dieses macht aber zusammen erst 9 Rthlr. nach dem Exempel aber sollen 1000 Rthlr. vertheilt werden,

also

also setze man 9 : 1 = 1000 u. s. w. Da es hier scheint, als ob man aus der falschen Voraussetzung, daß der älteste Sohn z. B. nur 1 Rthlr. bekäme, am Ende seinen richtigen Antheil berechnet, so hat man dieses die Regel Falsi genannt; es ist aber wie man sieht, nichts eigentliches Falsches dabey.

Von den Progreßionen oder Reihen.

§. 250.

Erklär. Wenn man zu den Gliedern einer stetigen arithmetischen Proportion mit Hülfe des Namens der Verhältniß, mehrere sucht, so erhält man an ihnen eine **arithmetische Progreßion** z. B. 1, 3, 5, 7, 9 u. s. w. Wenn die folgenden Glieder, wie in dem gegebnen Beyspiel immer grösser werden, so heißt sie **steigend**, und wenn sie kleiner werden, **fallend.**

§. 251.

Zus. Wenn man das erste Glied überhaupt mit a, den Namen der Verhältniß mit d; das letzte Glied mit y und die Anzahl der Glieder mit n bezeichnet, so läßt sich jede arithmetische Progreßion so darstellen.

I.	II.	III.	IV.	V.	n
a;	$a + d$;	$a + 2d$;	$a + 3d$;	$a + 4d$;	$a + (n - 1)d \ldots$

woraus man sieht daß das letzte Glied, oder $y = a + (n - 1)\,d$ ist.

§. 252.

Zuſ. Aus dieſer Formel, in welcher 4 Größen vorkommen, kann man aus 3 bekannten allemal die vierte berechnen. Geſetzt man ſollte a finden, ſo ziehe man auf beyden Seiten $(n - 1)\,d$ ab, ſo erhält man $y - (n - 1)\,d = a$ ſo iſt bey dem Exempel in (250) $y = 9$; $n = 5$ und $d = 2$ alſo $a = 9 - 8 = 1$.

Um d zu finden ziehe man a erſtlich beyderſeits ab, ſo erhält man $y - a = (n - 1)\,d$ und nun dividire man beyderſeits durch $n - 1$, ſo wird $\frac{y - a}{n - 1} = d$.

Wollte man n haben, ſo müßte man in der Formel $y - a = (n - 1)\,d$ beyderſeits mit d dividiren, da kommt $\frac{y - a}{d} = n - 1$ und nun auf beyden Seiten 1 addiren, alsdann wird $\frac{y - a}{d} + 1 = n$.

§. 253.

Lehrſ. In jeder arithmetiſchen Progreßion iſt die Summe des erſten und letzten Gliedes ſo groß als die Summe zweyer andern, welche vom erſten und letzten gleich weit abſtehen.

Beweis. Man drücke die in (251) vorgeſtellte Progreßion ſo aus:

I. II. III.

$a + (n - 6) d$; $a + (n - 5) d$; $a + (n - 4) d$;

IV. V. n ...

$a + (n - 3) d$; $a + (n - 2) d$; $a + (n - 1) d$ .. und addire nun jedes Paar solcher Glieder, wie sie im Satze genannt sind, so wird jede Summe $= 2a + (2n - 7) d$.

§. 254.

Zus. Nähme man so viel solcher Summen als Glieder in der Progreßion sind, so würden sie zusammengenommen doppelt so viel geben, als die Summe aller Glieder der Progreßion beträgt.

§. 255.

Aufg. Die Summe aller Glieder einer arithmetischen Progreßion aus dem ersten und letzten Gliede und der Anzahl der Glieder zu finden.

Aufl. 1) Man addire das erste und letzte Glied.

2) Man multiplicire diese Summe mit der Anzahl der Glieder.

3) Man halbire dieses Product. Z. B. die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 100 ist $\frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$

Beweis. Er folgt unmittelbar aus (254).

§. 256.

Anm. Wenn man die Summe ſ, nennt, ſo läßt ſich die vorige Auflöſung in folgender Formel darſtellen: $ſ = \frac{(a + y) . n}{2} = \frac{1}{2} (a + y) . n = \frac{1}{2} n . (a + y)$.

§. 257.

Erkl. Eine geometriſche Progreßion entſteht, wenn man zu den Gliedern einer ſtetigen geometriſchen Proportion mit Hülfe des Exponenten mehrere Glieder ſucht. Z. B. 1, 2, 4, 8, 16 ꝛc. Auch dieſe Progreßionen ſind ſteigend und fallend.

§. 258.

Zuſ. Wenn das erſte Glied einer geometriſchen Progreßion nicht 1 iſt, ſo kann man ſie in eine andere verwandeln, deren erſtes Glied 1 iſt und wo die Glieder nach eben dem Geſetze fortſchreiten, wenn man ſie alle durch das erſte dividirt (203) z. B. die Progreßion ſey:

3 6 12 24 . . .

div. 3) 1 2 4 8 . . . wo der Exponent eben ſo, wie bey der vorigen, 2 iſt.

§. 259.

Zuſ. In dieſem letztern Fall ſind alle Glieder als Potenzen des zweiten Gliedes anzuſehen; nennt man alſo das zweite Glied a, ſo wird der Exponent

nt auch a, und wenn die Anzahl der Glieder n ist, läßt sich die Progreßion so ausdrücken:

I)	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^{n-1}. Es sey z. B. a = 10
ist die Progr. II)	10^0,	10^1,	10^2	10^3	10^4	
oder III)	1	10	100	1000	10000	
e Exponenten IV)	0	1	2	3	4	

§. 260.

Zus. Wenn man die Exponenten unter die Glieder der Progreßion III. setzt, so sieht man, daß vom Anfang an so viel Verhältnisse in ihr vorkommen, als der jedesmalige Exponent Einheiten hat. Z. B. unter 1 steht 0 und hier ist noch keine Verhältniß vorhanden, weil zu einer Verhältniß wenigstens 2 Glieder gehören, unter 10 steht 1 und : 10 ist Eine Verhältniß u. s. w. In dieser Rücksicht hat man die Exponenten der Potenzen Anzahl der Verhältnisse oder Logarithmen, von den griechischen Wörtern λογος und ἀριθμος, genannt. Sie machen, wie man sieht, eine arithmetische Progreßion.

§. 261.

Lehrs. Wenn Glieder aus der geometrischen Progreßion in (259. III) in einander multiplicirt, oder dividirt werden sollen, so läßt sich das Product oder der Quotient durch Addition oder Subtraction der ihnen zugehörigen Logarithmen finden.

Beweis.

Beweis. Diese Glieder sind anzusehen als Potenzengrößen, und die Logarithmen als ihre Exponenten (260), folglich ist die in (162, 163) gelehrte Rechnung auf sie anzuwenden.

Z. B. man soll 10 mit 100 multipliciren, so kann man 1 zu 2 addiren, die Summe 3 gehört zu 1000, welche das verlangte Product seyn wird: oder man soll 10000 durch 1000 dividiren, so zieh man den zum Divisor gehörigen Logarithmen 3 von dem zum Dividend gehörigen 4, ab und der Rest 1, gehört zu 10, welche der verlangte Quotient ist.

§. 262.

Zus. Da man nach (48, 57) die Quotienten als Brüche ausdrücken kann, so wird der Logarithme eines Bruchs herauskommen, wenn man den Log. des Nenners vom Log. des Zählers abzieht; bey einem reinen Bruch wird er also negativ seyn. Z. B. Log. $\frac{1}{10}$ oder Log. 0, 1 $=$ 0 $-$ 1 $=$ $-$ 1. Dies zeigt sich auch so, wenn man die Progr. III. und IV. weiter linker Hand fortsetzt.

§. 263.

Zus. Um eine Zahl aus der geometrischen Progr. zu einer Potenz zu erheben, kann man ihren Logarithmen mit der Zahl welche den Grad der Potenz anzeigt, multipliciren und die Zahl welche zu diesem Logarithmen gehört, wird die

ver

verlangte Potenz seyn. Hinwiederum wenn man die Wurzel eines gewissen Grades aus einer solchen Zahl ziehen soll, so dividirt man ihren Logarithmen mit der Zahl welche diesen Grad anzeigt, und die Zahl in der geom. Progr. die zu diesem Quotienten gehört, wird die verlangte Wurzel seyn, dies folgt beydes aus (166, 167). Z. B. 10 soll zum Würfel erhoben werden, so nimmt man die 1 als ihren Logarithmen 3 fach, und die über 3 stehende Zahl 1000, ist der verlangte Würfel; oder aus 10000 die Quadratwurzel zu ziehen, dividirt man ihren Log. 4 durch 2, so gehört zum Quotienten 2 die Zahl 100 als die verlangte Quadratwurzel.

§. 264.

Anm. Wenn in der Progreßion (259 III. und IV) etwa ein Glied fehlte, so könnte man es aus (228, 225) finden, wenn man zwischen den unmittelbar vor und nach ihm liegenden die mittlere Proportionalzahl suchte, nemlich die geometrische bey III. und die arithmetische bey IV. Diese Betrachtung leitet auf den Gedanken zwischen die Glieder der Progreßionen in III. und IV. noch andere so lange einzuschieben, bis die Progr. III. alle zwischen 1 und 10; 10 und 100 ꝛc. enthaltenen natürlichen Zahlen, und die in IV. die zu ihnen gehörigen Logarithmen enthält. Der Vortheil hievon wäre, daß man nun alle mit denselben vorzunehmenden Multiplikationen in Additionen u. s. w. verwandeln könnte.

§. 265.

Aufg. Den Logarithmen von einer ganze
Zahl zu finden, die nicht mit in der Progr
(259 III.) vorhanden ist. Z. B. von der Zahl 2

Aufl. 1) Da die 2 zwischen 1 und 10 fällt
so suche man zwischen beyden die mittlere geom
Proportionalzahl und drücke sie, weil sie nicht gan
genau gefunden werden kann, wenigstens bis au
zehn Milliontheilchen aus; zugleich suche man
auch den ihr zugehörigen Logar. welcher die mittl
arithmetische Proportionalzahl zwischen den Logar
von 1 und 10 seyn wird.

2) Da die gefundene mittlere geom. Propor
tionalzahl nicht 2, sondern 3, 1622777.
und ihr zugehöriger Log. = 0, 5 ist, so suche
man zwischen ihr und 1 abermals eine mittlere
geom. Proportionalzahl nebst den ihr zugehörigen
Log. so wird diese der 2 schon näher kommen, als
die vorhergehende.

3) Aus den Zahlen nun die man vor sich hat
nehme man allemal diejenigen beyden, welche am
nächsten an diejenige grenzen deren Logar. man
verlangt, und suche zwischen denselben die mittle-
re geometrische Proportionalzahl, und jedesmal
den derselben zugehörigen Logarithmen, so wird
man nach einer 26 mal wiederholten Arbeit endlich
eine Zahl finden, welche von der 2 um kein zehn-
faches Milliontheilchen mehr unterschieden ist, diese
sieht man dann für die 2 selbst und den zuletzt ge-
gefun-

gefundenen Logarithmen für den zur 2 gehörigen an. Mündlich läßt sich hiervon nähere Erläuterung geben.

Beweis. Er folgt unmittelbar aus (264).

§. 266.

Zus. Man braucht auf diese Art die Logarithmen blos für die Primzahlen zu suchen, denn für die Zusammengesetzten finden sie sich leicht nach (261).

§. 267.

Anm. Man hat für diese Logarithmen besondere Tafeln, in welchen sie neben den ihnen zugehörigen Zahlen aufgestellt sind. Die größten aber enthalten nur Logarithmen bis auf die Zahl 102100. Zum bequemen Gebrauch unterscheidet man bey jedem Logarithmen seine ganze Einheit, oder die **Kennziffer**, und die an denselben hängenden Decimaltheile, oder die **Mantisse**. Es ergiebt sich nemlich von selbst, daß alle zwischen 0 und 1 enthaltenen Logarithmen in (259 IV.) größer als 0, und kleiner als 1 sind, folglich aus reinen Brüchen, und alle zwischen 1 und 2 enthaltenen aus 1 mit einem anhangenden reinen Bruch u. s. w. bestehen werden. Jede zu einem Logarithmen gehörige Zahl der geom. Progr. enthält eine Ziffer mehr, als die Kennziffer desselben Einheiten enthält.

§. 268.

Zus. Wenn man die Kennziffer eines Log. um 1, 2, 3 Einheiten vergrößert, so ist die Zahl wel-

cher

cher nun der Logarithme zugehört, anzusehen als ob sie mit 10, 100, 1000, multiplicirt worden wäre, und hinwiederum ist die dem Logar. zugehörige Zahl anzusehen, als ob sie durch 10, 100 ꝛc. dividirt wäre, wenn man seine Kennziffer um 1 oder 2 Einheiten verringert. Z. B. wenn Log. 124 = 2. 0934217, so ist Log. 1240 = 3. 0934217 und Log. 12, 4 = 1. 0934217 dies folgt aus (261).

§. 269.

Zus. Um also den Log. von einem Decimalbruche zu finden, sucht man den Log. von der Zahl die seinen Zähler ausmacht, indem man sie als eine ganze Zahl ansieht, und zieht dann von der Kennziffer desselben so viel Einheiten ab, als seine negative Ordnungsziffer deren enthält. Z. B. Log. 0, 124 = — 1. 0934217. Da nun das Zeichen — sich blos auf die Kennziffer, und nicht zugleich auch auf die Mantisse bezieht, (268) so setzt man zu Vermeidung aller Zweydeutigkeit, die negative Kennziffer lieber hinter die Mantisse, und in die gewöhnliche Stelle der Kennziffer eine 0. Z. B. Log. 0, 124 = 0. 0934217 — 1.

§. 270.

Anm. Will man den Logar. einer Zahl haben, die in den Tafeln nicht steht, und auch keine Factoren hat, mittelst deren er nach (261) gefunden werden könnte, so würde es sehr mühsam seyn, ihn

ihn nach (265) zu suchen; auch die leichtern Wege welche die höhere Mathematik hierzu gezeigt hat, würden noch zu beschwerlich seyn. Man verfährt deshalb am füglichsten auf folgende Art welche zwar nicht in aller Schärfe richtig ist, aber doch auch keinen beträchtlichen Fehler giebt.

Man soll z. B. den Log. von 7986457 suchen, so zerlege man sie in 7986000 + 457. Der erste Theil besteht aus 7986. 1000. Da nun von diesen beyden Factoren die Log. in den Tafeln stehen, so addire man sie nach (261) zusammen, um den von 7986000 zu haben. Eben so suche man auch den Log. von 7987000 und ziehe den vorigen von ihm ab, der Unterschied wird seyn: 544. Nun kann man nach der Regel Detri setzen: Der Unterschied zwischen beyden Zahlen: 1000 giebt zum Unterschied der Logarithmen: 544, wie viel giebt 457 als die Zahl um welche 7986457 von der 7986000 unterschieden war? man findet beynahe 249 solcher Theile; diese addirt man nun zum Logar. von 7986000 und erhält 6. 9023542 als den gesuchten Log.

§. 271.

Anm. Wenn man einen Log. hat der nicht in den Tafeln steht, und verlangt die ihm zugehörige Zahl, so nimmt man, wenn wenigstens seine Kennziffer noch in den Tafeln steht, die Differenz der Logarithmen von den beyden Zahlen zwischen welche er zunächst fällt, und dann auch die Differenz zwischen dem vor sich habenden, und dem nächst kleinern, und setzt nach der Regel Detri: die erste Differenz giebt bey den Zahlen welchen die Log. zugehören, eine Differenz von 1, wie

wie viel giebt die zweite Differenz? Z. B. man will die Zahl welche zum Log. 3. 5976293 gehört, so fällt dieser zwischen die Log. 3. 597585 und 3. 5976952, zu welchen die Zahlen 395 und 3960 gehören, welche um 1 unterschieden sind; die Differenz ihrer Log. aber ist 1097, un die Differenz zwischen dem, wozu man die Zah sucht, und dem kleinern von jenen beyden ist: 438 also setzt man 1097 giebt 1, wie viel 438 und findet 0, 4. Diese addirt man nun zu kleinern von den beyden Zahlen, und erhä 3959, 4 als die Zahl welche zum Log. 3 5976293 gehört.

§. 272.

Anm. Ist aber auch die Kennziffer des vor sich ha benden Logar. nicht in den Tafeln, so nimm man wieder wie in (271) die Logarithmen au den Tafeln zwischen deren Mantissen (267) di Mantisse des vor sich habenden zunächst fällt, un vergrössert die ihnen zugehörigen Kennziffern um s viel Einheiten, damit sie der Kennziffer des vo sich habenden Log. gleich werden, so werden si alsdann ein paar Zahlen zugehören, die man i den Tafeln aufsuchen kann, und an welche noc so viel Nullen gehangen werden, als Einheite zu den Kennziffern gekommen sind. Aus diese sucht man nun wieder wie vorhin, den Propor tionaltheil. Z. B. Der Log. zu welchem man di Zahl verlangt, ist 5. 1135690, so nimmt ma aus den Tafeln die Log. 3. 1132747 und 3 1136091 welche, wenn man zu ihren Kennziffer 2 addirt, zu den Zahlen 129800 und 12990 gehören. Die Differenz von den Logg. ist 3344 un die von den zugehörigen Zahlen: 100. Di Differenz zwischen dem vor sich habenden, un

nächst

nächst kleinerm Log. ist 2943, also setzt man: 3344 giebt 100, was 2943? und findet 88... Dieses wird zur kleinern Zahl gesetzt, und man erhält 129888... als die zum Log. 5. 1135690 gehörige Zahl.

§. 273.

Anm. Einige Anwendungen der Logarithmen lassen sich bey folgenden Fragen machen.

I. 13913 pariser Fuß geben beynahe 14400 rheinländische, wie viel giebt 1 pariser Fuß in rheinländischem Maas? Man setze:

13913 : 14400 = 1 paris. Fuß:
Log. 14400 = 4. 1583624
Log. 1 = 0. 0000000

Summe = 4. 1583624
Log. 13913 = 4. 1434207

Diff. = 0. 0149417. Dieser Log. findet sich in den Tafeln nicht genau; um aber doch die ihm zugehörige Zahl bis auf Tausendtheile der Einheit zu haben, vermehre man seine Kennziffer um 3 Einheiten, und suche ihn dann auf; der Log. von 1035 wird ihm am nächsten kommen. Wird nun diese Zahl wegen der um 3 Einheiten vergrößerten Kennziffer mit 1000 dividirt, so erhält man 1, 035 und so viel beträgt 1 paris. Fuß beynahe, an rheinländischen.

II. Umgekehrt: man fragt wie viel beträgt 1 rheinländischer Fuß an pariser? Man setze:

14400 : 13913 = 1 rheinl. F. :
die Log. der beyd. letzt. Glied. geb.: 4. 1434207
und Log. 14400 = 4. 1583624

0. 9850583—1.

 Weil

Weil sich hier die untere Zahl von der obern nich abziehen läßt, so setze man zur Kennziffer de obern noch so viel Einheiten, daß der Abzug ge schehen kann. Z. B. hier 1, und bemerke die selbe mit dem Zeichen — hinter der Differenz damit man wisse, daß die zum Log. gehörig Zahl, hier mit 10 dividirt werden müsse, da di Zahl welche zum obersten Log. gehört, durch Zu setzung der 1 zu seiner Kennziffer anzusehen ist als ob sie mit 10 multipl. worden wäre (268) Sucht man nun den gefundenen Log. auch noc unter der Kennziffer 3 auf, so muß die Zah abermals mit 1000, dividirt werden, oder ma muß in allen 4 Decimalstellen von ihr abschneiden sie wird seyn beynahe 0, 9662.

Man könnte auch im Exempel den obern Log vom untern abziehen, und den Rest negativ neh men; hierdurch erhielt man aber die verlangt Zahl nicht in Gestalt eines Decimal- sonder eines gemeinen Bruchs. Diese Differenz wär nemlich = — 0. 0149417, und da dieses an zusehen ist, als 0 — 0. 0149417, so muß di zu 0 gehörige Zahl 1, mit der zu 0. 014941 gehörigen: 1, 035, oder $\frac{1035}{1000}$ dividirt werder dies gäbe nach (91) $\frac{1000}{1035} = \frac{200}{207}$. Wenn ma diesen Bruch nach (139) verwandelt, so erhäl man auch 0, 9662 welcher sich aber nach der vo rigen Methode sogleich ohne weitere Reductio zeigt.

III. Man soll $\sqrt[5]{\frac{7329^3}{1984^2}}$ finden. Man tripli

den Log. des Zählers = 3. 8650447 (263)

so erhält man : 11. 5951341

Nu

Nun verdopple man den Log.
des Nenners: 3. 2975417 (263)
dies giebt: 6. 5950834

Dieses Doppelte ziehe man von jenem Dreyfachen ab (261) so kommt: 5. 0000507 und dies dividire man durch 5. (263) so ist der Quotient: 1. 0000101 der Log. der verlangten Wurzel, welche also etwas über 10 seyn wird.

IV. Ein Kapital von 1000 Rthlr. . . ist zu 5 Procent ausgeliehen worden; wenn nun das Interesse am Ende des Jahrs wieder zum Kapital geschlagen wird, so fragt man wie groß dieses Kapital nach 10 Jahren seyn werde?

Das Kapital wird am Ende des ersten Jahrs 1050 Rthlr. betragen; dies findet sich wenn man setzt 100 giebt 105 was 1000? Antw. $\frac{105}{100}$. 1000 Für das zweite Jahr kann man wieder setzen: 100 giebt 105, was $\frac{105}{100}$. 1000 Antw. $\frac{105.\ 105}{100.\ 100}$. $1000 = \left(\frac{105}{100}\right)^2.\ 1000$ und so sieht man leicht daß nach 10 Jahren der Werth seyn wird $\left(\frac{105}{100}\right)^{10}.\ 1000.$

Um nun den linker Hand stehenden Bruch zur 10ten Potenz zu erheben, kann man seinen Logar. nach (263) mit 10 multipliciren. Wird dann hierzu der Log. von 1000 noch addirt, so giebt die zum erhaltenen Log. gehörige Zahl den verlangten ganzen Betrag des Kapitals.

Es ist nun Log. 105	=	2. 0211893	
und Log. 100	=	2. 0000000	
Log. $\frac{105}{100}$	=	0. 0211893	
und das Zehnfache:	=	0. 2118930	
hierzu Log. 1000	=	3	
Log. des Kapitals	=	3 2118930	gehört

beynahe zu 1628, 9 also beträgt das Kapital 1628 Rthlr. 21 gr. 7 pf. Dieses Beyspiel gehört zur Interusurienrechnung.

Wenn man im allgemeinen statt 1000 Rthlr. des Kapit. = a; statt 5 Rthlr. den jährlichen Zinß = b; statt 100 den Buchstaben c; und statt 10, die Zahl der Jahre = n setzt, so hat man statt des Werthes $\left(\frac{100 + 5}{100}\right)^{10} . 1000$, itzt im allgemeinen $\left(\frac{c + b}{c}\right)^{n} . a$ und der Log. davon ist = n Log. (c + b) — Log. c + Log. a.

§. 274.

Aufg. Aus dem ersten Gliede, dem Exponenten und der Anzahl der Glieder einer geometrischen Progreßion das letzte Glied zu finden.

Aufl. 1) Man erhebe den Exponenten zu der Potenz welche 1 Grad weniger als die Anzahl der Glieder beträgt.

2) Man multiplicire diese Potenz mit dem ersten Gliede, so ist das Product das letzte Glied.

Beweis

Beweis. Man nenne das erste Glied a, den Exponenten e, die Anzahl der Glieder n und das letzte Glied y, so läßt sich die Progreßion allgemein so ausdrücken:

I. II. III. IV. n

a, ae, ae^2, ae^3 ae^{n-1}. Hieraus ergiebt sich, daß $y = ae^{n-1}$ woraus die obige Auflösung entstanden ist. Z. B. a = 3; e = 2; n = 5, so ist y = 16. 3 = 48.

§. 275.

Zus. Dividirt man in der Formel: $y = ae^{n-1}$ auf beyden Seiten mit e^{n-1} so erhält man $a = \frac{y}{e^{n-1}}$. Dividirt man hingegen mit a und zieht dann die $\sqrt[n-1]{}$ aus, so findet man $e = \sqrt[n-1]{\frac{y}{a}}$. Um n zu finden, muß man sich der Logarithmen bedienen. Man nehme wieder

$$y = ae^{n-1}$$

so ist $\text{Log.}y = \text{Log.}a + (n-1)\,\text{Log.}e$ (263)

oder: $\text{Log.}y = \text{Log.}a + n\text{Log.}e - \text{Log.}e$ (132)

Man subtr. beyderſ. Log. a u. add. Log. e so kommt: $\text{Log.}y - \text{Log.}a + \text{Log.}e = n\text{Log.}e$

Man div. beyderſ. mit Log. e, so wird $\frac{\text{Log.}y - \text{Log.}a + \text{Log.}e}{\text{Log.}e} = n$

Es sey z. B. $a = 5$; $e = 2$; $y = 80$, so ist

Log. y = 1. 9030900
Log. a = 0. 6989700 subtr.

1. 2041200
add. Log. e = 0. 3010300

1. 5051500
div. d. Log. e = 0. 3010300 giebt zum Quot. 5 = n

I. II. III. IV. V.
Die Progreßion ist also: 5, 10, 20, 40, 80.

§. 276.

Aufg. Die Summe aller Glieder einer geometrischen Progreßion aus dem ersten Gliede, dem Exponenten und der Anzahl der Glieder zu finden.

Aufl. 1) Man erhebe den Exponenten zu dem Grade der Potenz welcher der Anzahl der Glieder gleich ist, und multiplicire diese Potenz mit dem ersten Gliede.

2) Man ziehe von diesem Product das erste Glied ab.

3) Man dividire diesen Rest mit dem um 1 verminderten Exponenten, so giebt der Quotient die Summe der Progreßion.

Beweis. Man setze die Summe = s, und nehme aus (274).

a

$$a + ae + ae^2 + ae^3 + ae^{n-1} = s$$

mult. beyd- derſ. mit e $ae + ae^2 + ae^3 + ae^{n-1} + ae = se$

ſubtr. $a + ae + ae^2 + ae + ae^{n-1} \qquad = s$

ſo bleibt $-a + ae^n$ oder: $ae^n - a = se - s = (e-1)s$ (132)

divid. durch $e-1$, giebt: $\frac{ae^n - a}{e-1} = s$ aus welcher Formel die obige Auflöſung überſetzt iſt. Weil ae^{n-1} den Werth des letzten Glieds ausdrückt, und ae^n herauskommt, wenn man jenen Ausdruck mit e multiplicirt (61), ſo kann man no 1 der Aufl. auch ſo abfaſſen: man multiplicire das letzte Glied wenn es bekannt iſt, mit dem Exponenten.

Z. B. Es hat Jemand itzt und noch auf 10 Jahre hinaus eine Rente von 100 Rthlr. zu beziehen, geſetzt er wollte dieſe gegenwärtig für baares Geld verkaufen, wie viel wird ſie werth ſeyn, wenn 5 Procent Zinßen gerechnet werden?

Man ſieht, daß nach dieſer Vorausſetzung 105 Rthlr. die nach 1 Jahr zahlbar ſind, itzt nur 100 Rthlr. werth ſind; d. i. wenn das Capital überhaupt = a geſetzt wird, ſo wird der Werth den es 1 Jahr früher hat, gefunden, wenn man ſetzt: 105 giebt 100 oder, welches einerley: 21 giebt 20, was a? Antw. $\frac{20}{21}$ a. Um zu finden, wie viel es wieder ein Jahr früher werth iſt, ſetzt man aufs neue 21 giebt 20, was $(\frac{20}{21})$ a? und findet $(\frac{20}{21})^2$ a. Ueberhaupt wird alſo der Werth n Jahre

 früher

früher $\frac{20}{21})^n$ a seyn; und der Werth der ganzen Rente wird gegenwärtig betragen a $+ (\frac{20}{21})$ a $+ (\frac{20}{21})^2$ a .... $+ (\frac{20}{21})^n$ a, wo man also eine geometrische Progreßion, deren erstes Glied a; der Exponent $\frac{20}{21}$, und die Anzahl der Glieder n + 1 ist, summiren muß. Wenn nun das letzte Glied mit dem Exponenten multiplicirt wird, so hat man $(\frac{20}{21})^{n+1}$ a; davon das erste subtrahirt, bleibt $(\frac{20}{21})^{n+1}$ a — a; dieses mit $\frac{20}{21}$ — 1 = — $\frac{1}{21}$ dividirt, oder mit — 21 multiplicirt (87), giebt nach (276) die verlangte Summe = — 21. $(\frac{20}{21})^{n+1}$ + 2100 oder 2100 — 21. $(\frac{20}{21})^{n+1}$ a.

Ist nun a = 100 und n = 10, so hat man

Log. 20 =	1.3010300	
Log. 21 =	1.3222193	subtr.
	0.9788107 — 1	
mult. mit	11	
	9788107	
	9.788107	
	10.7669177 — 11	
Log. 2100 =	3.3222193	add.
	3.0891370	gehört zu 1228.

Diese Zahl also abgezogen von obigen 2100, bleibt 872 Rthlr. als der gegenwärtige Werth der Rente.

Die

Die Geometrie.

§. 1.

Die stetigen Größen mit denen sich die Geometrie nach (10 Einl.) beschäftigt, lassen sich alle auf die verschiedenen Ausdehnungen die man sich im Raume gedenken kann, zurückbringen.

§. 2.

Erkl. Diejenige Ausdehnung welche man sich nach allen möglichen Richtungen zugleich gedenken kann, wird die **körperliche** genannt; und man unterscheidet an derselben besonders die **Länge**, **Breite** und **Dicke**, unter welchen alle Richtungen begriffen werden können.

§. 3.

Erkl. Ein ringsum begrenztes Stück Raum heißt ein **geometrischer Körper**. Die Grenze dieses Körpers selbst, eine **Fläche**; die in einer Fläche wieder angenommene Grenze, eine **Linie**, und die Grenze einer Linie, ein **Punkt**.

§. 4.

Zus. Es können also der Fläche nur 2 Ausdehnungsarten, nemlich die Länge und Breite; der Linie kann nur eine, nemlich die Länge, und dem Punkte gar keine, zukommen.

§. 5.

Anm. Flächen, Linien und Punkte kann man als bloße Grenzen nicht anders als in Verbindung mit dem Körper, darstellen, von welchem sie die Grenzen sind. So ist z. B. ein geometrischer Punkt an dem äussersten Ende einer genau zugespitzten Nadel vorhanden, der mit einer solchen Spitze gemachte Stich ist aber schon eine Grube welche eine körperliche Ausdehnung hat, die man deshalb auch einen blos physischen Punkt nennen kann, es sey denn, daß man sich auch nur wieder die feinste Grenze dieser Grube besonders vorstellt.

§. 6.

Zus. Man gedenke sich, daß bey der Bewegung eines Körpers an welchem sich zugleich auch ein geometrischer Punkt mit bewegt, dieser Punkt Spuren der Bewegung hinter sich ließ, so werden diese Spuren das Bild einer Linie darstellen. Bey einer solchen Bewegung kann der Punkt niemals an zwey Orten zugleich seyn, sondern man muß sich gewisse Absätze bey derselben, oder kleine Linien vorstellen, aus welchen die große zusammengesetzt ist. Man muß übrigens diese Absätze so klein annehmen, daß es nicht möglich ist durch irgend eine Zahl den Werth dieser Kleinheit zu bestimmen; sie sind blos etwas mehr als ein geometrischer Punkt, aber kleiner als alles was sich durch irgend ein Maas bestimmen läßt. Einen solchen unendlich kleinen Theil einer Linie nennt man ein **Element** von ihr.

§. 7.

Anm. Da man sich in einer Linie allenthalben Grenzen oder Punkte gedenken kann, so kann man sich auch allenthalben zwischen zwey zunächst aneinander liegenden Punkten, Elemente gedenken.

§. 8.

Erkl. Wenn jedes Element gegen sein angrenzendes nach allen Seiten einerley Neigung hat, so heißt die Linie gerade z. B. a b Fig. 1.; wird hingegen diese Neigung auf einer Seite grösser als auf der andern, so ist die Linie, wenigstens an dieser Stelle, krumm. z. B. c d Fig. 2.

§. 9.

Anm. Aus diesem Begriffe folgt, daß man das einzelne Element selbst weder als gerade noch als krumm ansehen kann. Uebrigens läßt sich der Begriff von einer geraden Linie auch noch so bilden: Man gedenke sich, daß von der Fläche a c b Fig. 3. die Endpunkte ihrer Grenze a b im Raum so befestigt werden, daß sie immer in einerley Stelle bleiben wenn übrigens die ganze Fläche a c b in Gedanken vom Papier aufgehoben und um die unveränderlichen Punkte herumgeführt wird. Ist alsdann die Linie a b so beschaffen, daß alle ihre Punkte, während des Umdrehens immer in ein und eben derselben Stelle bleiben, so ist sie gerade. Kommen bey einer krummen Linie einige Punkte, wie a b c Fig. 4. vor, die bey dem erwehnten Umdrehen ihre Stellen nicht ändern, so kann man auch von solchen Punkten wirklich sagen, daß sie, einzeln betrachtet, in einer geraden Linie liegen.

§. 10.

Grundſ. Zwiſchen jeden 2 gegebnen Punkten läßt ſich eine gerade Linie ziehen, aber auch nicht mehr, als eine einzige. Man kann ſie nemlich zuerſt durch den einen Punkt ziehen und ſie dann ſo lange um denſelben drehen bis ſie den andern erreicht. Thut man nun eben dies mit noch einer andern geraden Linie, ſo wird ſie entweder ganz in die vorige hineinfallen, oder ſie wird nicht wie die vorige immer in einerley Stelle bleiben können, wenn man eine ſolche Umdrehung wie in (9) damit vornimmt, und folglich in dieſem letztern Falle keine gerade Linie ſeyn.

§. 11.

Grundſ. Eine gerade Linie allein kann keinen Raum einſchließen. Denn wenn dies geſchehen ſollte, ſo müßten ihre beyden Endpunkte aneinander ſtoßen und die Elemente müßten auf der Seite, wo dieſer Zuſammenſtoß geſchieht, eine gröſſere Neigung gegen einander haben, als auf der andern, welches aber gegen den Begriff der geraden Linie in (8) ſtreitet.

§. 12.

Grundſ. Eben ſo wenig können auch 2 gerade Linien allein, einen Raum einſchließen. Es müßte nemlich jedes Paar von ihren Endpunkten zuſammenſtoßen, alsdann aber würde aus beyden wieder nur Eine gerade Linie werden (10).

§. 13.

Grundſ. Drey gerade Linien können einen Raum einſchließen. Denn 2 derſelben können nach (10) mit dem einen Paar ihrer Endpunkte aneinander ſtoßen und zwiſchen dem andern Paar kann die dritte gerade Linie gezogen werden.

§. 14.

Erkl. Eine Fläche, worauf ſich nach allen Richtungen gerade Linien ziehen laſſen und deren Punkte auch ſämmtlich in ihr liegen, heißt eine Ebne, (planum).

§. 15.

Erkl. Wenn zwey Linien in einer Ebne mit ihren Endpunkten zuſammenſtoßen, ſo heißt die Neigung welche ihre erſten beyden Elemente, vom Zuſammenſtoßungspunkt an gerechnet, gegen einander haben, ein ebner Winkel. Der Punkt des Zuſammenſtoßes wird der Scheitel und die Linien ſelbſt werden die Schenkel des Winkels genannt. Wenn die Neigung wie bey den Elementen der geraden Linie, auf beyden Seiten gleich iſt, ſo kann man den Winkel gleichgültig nennen, iſt ſie aber auf der einen Seite gröſſer als auf der andern, ſo heißt er im erſten Fall hohl oder eingezogen und im letztern erhaben oder hervorſpringend.

§. 16.

Anm. Man pflegt den Winkel entweder nur mit einem Buchſtaben zu bezeichnen, den man an ſeinen

nen Scheitel setzt, oder auch mit dreyen von welchen einer am Scheitel, die andern aber an den Enden der Schenkel stehen. Bey Nennung des Winkels steht der am Scheitel befindliche Buchstabe in der Mitte. Z. B. der Winkel c, oder acb, Fig. 5. welcher oberwärts hohl und unterwärts erhaben ist.

§. 17.

Anm. Da die Elemente unendlich klein sind (6), so wird ihre Neigung schwer wahrzunehmen seyn; da aber bey der geraden Linie alle Neigungen der einzelnen Elemente gleich sind, so werden auch gerade Linien in jeder beliebigen Länge eben dieselbe Neigung gegen einander haben, welche ihre ersten Elemente gegen einander hatten, und man kann deshalb auch die Neigung der ganzen Schenkel für den Winkel annehmen. Bey krummen Linien aber muß man, um den Winkel deutlicher darzustellen, die zusammenstoßenden Elemente zu geraden Linien verlängern.

§. 18.

Erkl. Ein paar gerade Linien ab und cd, Fig. 6. in einer Ebne, welche vor- und rückwärts verlängert, nie zusammenstoßen, heißen gleichlaufend oder parallel. Liegen sie aber so, daß sie bey der Verlängerung immer näher zusammen rücken, so heißen sie convergirend und auf der andern Seite wo sie sich immer weiter von einander entfernen, divergirend. Z. B. ef und gh Fig. 7.

§. 19.

Erkl. Zwey Winkel in einer Ebne abc und cbd Fig. 8. welche einen Schenkel bc gemein haben und wo die beyden übrigen ba und bd ohne auf einander zu liegen, eine gerade Linie zusammen machen, heisen **Nebenwinkel** (anguli contigui oder deinceps positi.

§. 20.

Erkl. Wenn der gemeinschaftliche Schenkel cb der Nebenwinkeln so gegen die gerade Linie ad steht, daß die Winkel auf beyden Seiten gleich werden, so heißt er eine auf den Schenkeln **senkrecht** oder **lothrecht** stehende Linie (linea perpendicularis s. normalis) oder auch geradehin ein **Perpendikel.** Der Winkel selbst den das Perpendikel mit jedem Schenkel ba und bd Fig. 9. macht, ein **rechter** oder **gerader** (angulus rectus). Steht aber bc Fig. 8. so, daß die Winkel ungleich werden, so heißt er gegen ad **schiefstehend** und die Nebenwinkel werden ebenfalls **schiefe** (obliqui) genannt; besonders heißt der grössere abc **stumpf** (obtusus) und der kleinere cbd **spitzig** (acutus).

§. 21.

Erkl. Ein mit Linien begrenzter Raum heißt eine **Figur** und zwar eine **geradlinigte**, wenn die Grenzlinien gerade sind; **krummlinigt** wenn sie krumm, und **vermischtlinigt** wenn sie theils gera-

de, theils krumm sind. Die einzelnen Linien selbs
werden Seiten der Figur genannt.

§. 22.

Grundſ. Eine krumme Linie kann allein eine
Raum einschliessen. Denn da sich ihre Element
auf der einen Seite mehr als auf der andern gege
einander neigen, so kann es durch den Anwach
dieser Neigungen bey fortgesetzter Verlängerung de
krummen Linie geschehen, daß sie wieder an de
Ort gelangt, von welchem sie ausgegangen is
Zieht man, ehe jener Zusammenstoß erfolgt, zw
schen den noch entfernten Endpunkten der krumme
Linie, eine gerade (10), so erhellet, daß zwe
Linien, von welchen die eine krumm, und die and
re gerade ist, ebenfalls einen Raum einschließen.

§. 23.

Erkl. Wenn sich eine gerade Linie a c Fig. 1
in einer Ebne um einen von ihren Endpunkten
bewegt, daß dieser immer an einerley Stelle bleib
der andere aber so lange nach einerley Richtun
fortgeht, bis er wieder in seine erste Lage gekom
men ist, so beschreibt sie einen **Kreis** (circulus
Die gerade Linie a c heißt der **Halbmesser** de
Kreises (semidiameter s. radius). Die Stelle
des unbeweglich gebliebenen Punktes, der **Mitte**
punkt (centrum). Die vom beweglichen Punkt
beschriebene krumme Linie a d e b f a, der **Umkre**
(peripheria). Die vom Umkreis eingeschlosse

Fläc

Fläche die **Kreisfläche** (area circuli). Eine gerade Linie de von einem Punkt des Umkreises bis zu einem andern, eine **Sehne** (chorda) und wenn sie zugleich durch den Mittelpunkt geht, wie a b, ein **Durchmesser** (diameter). Ein beliebiger Theil des Umkreises, wie ed, ein **Bogen** (arcus). Ein Stück Kreisfläche a c f welches von zwey Halbmessern und einem Bogen eingeschlossen wird, ein **Ausschnitt** (sector). Ein anderes Stück wie d e d welches zwischen einem Bogen und seiner Sehne enthalten ist, ein **Abschnitt** (segmentum).

§. 24.

Grundſ. Alle Halbmesser eines Kreises sind einander gleich. Sie sind nemlich insgesammt der a c gleich (6. Ar.).

§. 25.

Grundſ. Eine Linie deren einer Endpunkt m näher, und der andere n weiter vom Mittelpunkt ist, als die Länge des Halbmessers beträgt, schneidet den Kreis. Denn der erstere Punkt befindet sich innerhalb und der letztere ausserhalb desselben.

§. 26.

Grundſ. Jeder Durchmesser ist doppelt so groß, als der Halbmesser und theilt den Kreis in zwey gleiche Theile. Da nemlich der Durchmesser eine gerade Linie ist, so hat er auf der einen Seite alle die Eigenschaften die er auf der andern hat (8); es kann also eine andere gerade Linie a c die auf ihm

liegt, beym Umdrehen um c, bis sie in cb fällt genau dasselbe verrichten wenn sie oberwärts geht, als wenn sie unterwärts geht.

§. 27.

Erkl. Eine gerade Linie bg welche einen Bogen an seiner äussern Seite nur in einem einzigen Punkte berührt, und bey ihrer Verlängerung immer auf dieser Seite bleibt, heißt eine Tangente von ihm.

§. 28.

Anm. Die verschiedenen Lagen in welche der Halbmesser bey Beschreibung des Kreises kommt, machen, daß man die Kreisfläche als ein Aggregat von Winkeln ansehen kann, deren Schenkel sämmtlich von einerley Länge sind und zwischen deren oberen Enden Bögen liegen, die zusammen den Umkreis ausmachen. Wenn nun der Halbmesser von a nach f gerückt ist, so hat er den Winkel acf, und sein Endpunkt den Bogen af beschrieben. Man stelle sich vor, daß der Halbmesser und der Winkel mit ihm, von f nach b zu fortrückt bis der Schenkel ac in fc liegt, so wird er einen neuen, dem vorigen völlig gleichen Winkel beschrieben haben und der neue Bogen zwischen den Endpunkten der Schenkel wird auch dem vorigen völlig gleich seyn. Setzt man diese Betrachtung weiter fort, so erhellt, daß, so vielmal ein kleiner Winkel in einem größern enthalten ist, auch eben so vielmal sein Bogen im grössern enthalten seyn müsse, und daß sich also die Bögen wie die Winkel verhalten werden, wenn auch gleich die Verhältniß irrational wäre (209 A.)

De

Denn Winkel und Bögen wachsen ganz gleichförmig. Diesen Umstand hat man benutzt, Winkel mittelst der Kreisbögen zu messen, die zwischen ihren Schenkeln aus ihrem Scheitel als aus einem Mittelpunkte, beschrieben werden. Auf die Größe des Halbmessers kommt es hiebey nicht an, da ein Winkel in seiner Größe nicht geändert wird, seine Schenkel mögen so lang genommen werden als man will (17). Für die Einheit dieses Maaßes nimmt man den 360sten Theil des Umkreises an und nennt denselben einen Grad. Diesen Grad theilt man aufs neue in 60 Minuten u. so fort, daß die kleinern Theile lauter Sexagesimalbrüche werden (150 Ar.). Den Grad bezeichnet man mit o und die Sexagesimalbrüche desselben mit I, II, III, ꝛc. Auf den ganzen Kreis werden also 360°, auf den halben 180° auf den vierten Theil oder Quadranten 90° u. s. w. kommen.

§. 29.

Heisches. Man soll über einer geraden Linie aus einem in ihr gegebnen Punkt einen Halbkreis beschreiben.

§. 30.

Lehrs. Die beyden Nebenwinkel abc und cbd Fig. 8. machen zusammen 180°.

Beweis. Man beschreibe aus b über ad einen Halbkreis (29), von diesem wird ac das Maas von abc und cd das von cbd seyn. Da nun der Halbkreis 180° (28) hält, so folgt das was im Satze behauptet worden.

 §. 31.

§. 31.

Anm. Wenn man also von zwey Nebenwinkeln nur einen messen kann, so läßt sich das Maas des andern finden, wenn man des erstern seines von 180° abzieht. Denn es seyen die Nebenwinkel x und y, so ist $x + y = 180^\circ$; beyderseits x subtrahirt, giebt $y = 180 - x$ (49 Ar.).

§. 32.

Zus. Wenn man die Linie c b unterhalb a d verlängert, so entstehen hier ebenfalls wieder ein paar Nebenwinkel; auch zu beyden Seiten von c e sind dergleichen vorhanden, die also gleichfalls zusammen 180° machen.

§. 33.

Zus. Wenn die Nebenwinkel rechte sind, wie Fig. 9. so ist das Maas eines jeden 90 oder ein Quadrant (28) und es sind deshalb alle rechte Winkel einander gleich; auch machen jede 2 Nebenwinkel so viel als 2 rechte.

§. 34.

Zus. Jeder stumpfe Winkel hat über, jeder spitzige unter 90° zu seinem Maaße (20).

§. 35.

Lehrs. Wenn 2 Winkel, wie a b c und c b d Fig. 8. einen Schenkel c b gemein haben, und zusammen 180° betragen, so machen die andern Schenkel a b und b d eine gerade Linie und die Winkel sind deshalb Nebenwinkel.

Be-

Beweis. Man nehme an, bd sey nicht die ge- rade Verlängerung von ab, so müßte es eine an- dere Linie geben die man als eine solche Verlänge- rung ansehen könnte, und diese müßte entweder über, oder unter bd fallen; gesetzt sie sey bf, so müßte sowohl acdf nach (26) als auch acd nach der Voraussetzung des gegenwärtigen Satzes, ein Halbkreis seyn. Da aber von diesen Bögen einer ein Theil des andern ist, so können beyde einander nicht gleich seyn (5. Ax.) folglich kann auch das was der Satz behauptet nicht bezweifelt werden.

§. 36.

Zus. Jeder hohle Winkel hat weniger, und jeder erhabene mehr als 180° zu seinem Maaße und das Maaß des gleichgültigen ist 180° selbst (26).

§. 37.

Lehrs. Alle um einen Punkt herum befind- liche Winkel machen zusammen 360° oder 4 rech- te Winkel.

Beweis. Man beschreibe aus ihrem gemein- schaftlichen Scheitel einen ganzen Kreis, so werden alle Theile desselben als Maaße der sämmtlichen Winkel anzusehen seyn, und diese betragen zusam- men 360° (28).

§. 38.

Erkl. Wenn 2 gerade Linien ab, cd, Fig. 24. einander schneiden, so heisen die an den entgegenge- setzten Seiten des Durchschnittspunkts m liegenden

Winkel, amd und cmb, oder amc und dmb Scheitel: oder Vertikalwinkel.

§. 39.

Lehrs. Die Vertikalwinkel sind einander gleich.

Beweis. $amd + dmb = 180^\circ$ } (30).
$cmb + dmb = 180^\circ$ }

also $amd + dmb = cmb + dmb$ (6. Ax.)
$dmb = dmb$ (3. Ax.)

subtr. $amd = cmb$ (49. Ax.)

Auf eben diese Art wird auch bewiesen, daß $amc = dmb$.

§. 40.

Anm. Es kommt oft vor, daß man einen Winkel nicht unmittelbar messen kann, wenn nun dieses etwa mit seinem Vertikalwinkel angeht, so kann man das Maaß desselben für jenen brauchen.

§. 41.

Erkl. Der Raum, welchen 3 gerade Linien einschließen, heißt ein geradlinigtes Dreyeck (triangulum) abc Fig. 11. Sind alle 3 Seiten desselben gleich, so heißt es gleichseitig (triang. aequilaterum) Sind nur 2 gleich, def Fig. 12. gleichschenklich (aequicrurum s. isosceles). Ist keine der andern gleich, ungleichseitig (scalenum) ghi Fig. 13.

§. 42.

Zus. Da die 3 Seiten 6 Endpunkte haben und je 2 und 2 beym Zusammenstoßen einen Winkel machen, so müssen in jedem Dreyeck auch 3 Winkel vorkommen. Sind diese nun alle 3 spitzig, so heißt daß Dreyeck **spitzwinklich** (tr. acutangulum) abc Fig. 11. Ist einer ein rechter wie f in Fig. 12. so heißt es **rechtwinklicht** (tr. rectangulum). Ist einer stumpf wie h Fig. 13, so heißt es **stumpfwinklicht** (obtusangulum).

§. 43.

Anm. Nach der Aehnlichkeit sollte wie beym spitzwinklichen, ein Dreyeck nur dann recht- oder stumpfwinklicht genannt werden, wenn die Winkel alle drey, rechte oder stumpfe wären, allein die Folge wird zeigen, daß solche Dreyecke nicht möglich sind.

§. 44.

Erklär. Der Raum, welchen 4 gerade Linien einschließen, heißt ein **Viereck**. Sind hier die Seiten und Winkel gleich, wie abcd Fig. 14. so heißt das Viereck ein **Quadrat**; sind die Seiten gleich, aber die Winkel nicht, wie efgh, Fig. 15. so hat man die **Raute** (Rhombus); Sind die Winkel sämmtlich, von den Seiten aber nur, die einander gegenüberstehenden gleich, wie iklm Fig. 16. so erhält man das **Rechteck** (Rectangulum, oder quadr. oblongum). Sind bey den einander gegenüberstehenden gleichen Seiten die

Winkel ungleich, wie n o p q, so hat man das **rauten ähnliche Viereck** (Rhomboides); die übrigen zu keiner der vorhergehenden Arten gehörigen Vierecke nennt man **Trapezien**, z. B. r s t u Fig. 18.

§. 45.

Erkl. Wenn ein Raum von mehr als 4 geraden Linien eingeschlossen wird, so entsteht überhaupt ein **Vieleck** (polygonum) welches man besonders 5, 6, 7 Eck u. s. w. nennt, je nachdem es aus 5, 6, 7 ꝛc. Seiten besteht. Man unterscheidet ausserdem bey den Vielecken blos **reguläre** und **irreguläre**. Regulär heißt ein Vieleck, wenn so wohl alle seine Seiten als Winkel einander gleich sind a b c d e f Fig. 19. Gleiche Seiten mit ungleichen Winkeln, oder ungleiche Seiten mit gleichen Winkeln, geben eben so wie ungleiche Seiten und ungleiche Winkel, **irreguläre Vielecke** Fig. 20. g h i k l m.

§. 46.

Erkl. Wenn die Peripherie eines Kreises durch alle Ecken einer Figur geht, a b c d e Fig. 21, so sagt man sie sey in den Kreis beschrieben; berühren hingegen alle ihre Seiten den Kreis, so sagt man, sie sey **um den Kreis** beschrieben Fig. 22. f g h i.

§. 47.

Erkl. Aehnlich heißen ein paar Dinge wenn sie einerley **Merkmale** haben.

§. 48.

Zus. Da bey geraden Linien die Merkmale in einer Reihe von Elementen und den überall gleichen Neigungen die sie gegen einander haben, bestehen, so werden alle gerade Linien einander ähnlich seyn. Bey einem Winkel sind die Merkmale sein Scheitel, seine Schenkel und die Neigung der letztern gegeneinander, da nun diese bey allen Winkeln vorkommen, so werden sie ebenfalls alle einander ähnlich seyn. Bey Figuren bestehen die Merkmale in den Verhältnissen ihrer Seiten und den Größen der von ihnen eingeschlossenen Winkel, und deshalb werden 2 Figuren nur alsdann einander ähnlich seyn wenn ihre Seiten in einerley Ordnung gleiche Verhältnisse zu einander haben, und einerley Winkel mit einander machen.

§. 49.

Zus. Gerade Linien und Winkel müssen einander wechselseitig decken, wenn sie gleich sind; Figuren werden dieses aber nur alsdann thun, wenn sie ausser ihrer Gleichheit auch Aehnlichkeit haben, man nennt sie alsdann Congruent.

§. 50.

Heischesätze. I. Man soll durch einen oder 2 gegebene Punkte eine gerade Linie ziehen.

II. Man soll eine gerade Linie in gleicher Richtung nach Belieben verlängern.

III. Man

III. Man soll eine gerade unbegrenzte Linie aus einem gegebenen Punkte mit einem Kreisbogen an zwey verschiedenen Orten schneiden.

Die Möglichkeit dieser letztern Forderung erhellet so: Man nehme in der gegebnen Linie a c Fig 23. nach Gefallen einen Punkt c, und ziehe nach ihm von f eine gerade Linie fc (50. I.) diese Linie verlängere man über c hinaus (50. II.); mit dieser verlängerten Linie als Halbmesser wird sich der verlangte Kreisbogen beschreiben lassen. Der Kreis nemlich, wozu dieser Bogen gehört, wird rings um f Punkte haben, und einige derselben werden jenseits, andere diesseits der Linie ab liegen, indem c jenseits und f diesseits derselben liegt.

§. 51.

Lehrs. Wenn in den beyden Dreyecken abc und $\alpha\beta\gamma$ Fig. 25, 26, die Seite ab der $\alpha\beta$ und die ac der $\alpha\gamma$ auch der Winkel a dem α einander gleich sind, so congruiren die Dreyecke.

Beweis. Man gedenke sich daß die beyden Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel Fig. 25. auf Fig. 26. so gelegt werden, daß a auf α, ab auf $\alpha\beta$ und ac auf $\alpha\gamma$ zu liegen kommt, so werden sich diese Linien und Winkel decken (49); der Punkt b wird auf β und c auf γ liegen und cb wird deshalb auch in $\gamma\beta$ fallen (10). Der Winkel c wird γ, und b wird β decken.

§. 52.

Zus. Wenn also in zweyen Dreyecken, zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel einander gleich sind, so sind nicht blos die Dreyecksflächen, sondern auch die übrigen gleichnamigen Seiten und Winkel einander gleich.

§. 53.

Lehrs. In einem gleichschenklichen Dreyecke sind die Winkel welche die gleichen Schenkel mit der dritten Linie, oder der Grundlinie, machen, einander gleich.

Beweis. Man nehme an, daß in den Dreyecken des vorigen Lehrs. $ab = ac$ und $\alpha\beta = \alpha\gamma$ sey, so läßt sich beym aufeinander legen ab auf $\alpha\gamma$ und ac auf $\alpha\beta$ legen und die Dreyecke müssen noch immer kongruiren; also wird itzt der Winkel

$b = \gamma$ und, in (51) war
$b = \beta$ folglich

$\beta = \gamma$ (6. Ax.).

§. 54.

Lehrs. Wenn in den beyden Dreyecken abc und $\alpha\beta\gamma$ Fig. 25, 26 die Seite $bc = \beta\gamma$; der Winkel $b = \beta$ und $c = \gamma$ so congruiren die Dreyecke.

Beweis. Man kann sich wieder vorstellen, daß bc auf $\beta\gamma$ so gelegt werde, daß b in β, und c in

γ trift,

γ trift, und es werden sich alsdann diese Seiten und Winkel decken folglich wird auch der Punkt in welchem sich a b und a c schneiden, kein anderer seyn als α, in welchem sich $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ schneiden. Es wird also $ab = \alpha\beta$, $ac = \alpha\gamma$ und $a = \alpha$ seyn.

§. 55.

Lehrs. Wenn in einem Dreyecke die Winkel an der Grundlinie gleich sind, so ist das Dreyeck gleichschenklich.

Beweis. Man kann alsdann in den mehr erwehnten Dreyecken b auf γ und c auf β legen und die Dreyecke werden noch immer congruiren. Es wird also gegenwärtig $ab = \alpha\gamma$; in (54) war

$$\frac{ab = \alpha\beta \text{ folglich}}{\alpha\gamma = \alpha\beta \text{ (6. Ar.).}}$$

§. 56.

Lehrs. In einem gleichseitigen Dreyecke sind alle Winkel gleich; und wenn in einem Dreyecke alle Winkel gleich sind, so ist es ein gleichseitiges.

Beweis. Der erste Theil des Satzes erhellet daraus, daß man ein gleichseitiges Dreyeck in dreyerley Rücksichten als ein gleichschenklichtes ansehen kann. Die Wahrheit des letztern Theils ergiebt sich, wenn man bedenkt, daß so oft 2 Winkel gleich sind, auch eben so oft 2 Seiten gleich werden (55).

§. 57.

Zus. Das gleichseitige Dreyeck gehört also zu den regulären Figuren (45).

§. 58.

Lehrs. Wenn in zwey Dreyecken acd und abd Fig. 27, 28, 29 (wo ad zwey Stellen vertritt) alle drey Seiten einander gleich sind, so kongruiren die Dreyecke.

Beweis. Wenn man die Dreyecke so aneinander legt, daß eine Seite gemeinschaftlich wird, so giebt es nicht mehr als die 3 in den angezeigten Figuren enthaltenen Lagen, nimmt man nun zuerst Fig. 27, so ist, weil ac = ab, der Winkel c = b (53) und weil nun auch noch cd = db, so kongruirt △ acd mit △ abd (51).

Für Fig. 28. ziehe man die Hülfslinie cb, so ist acb = abc (53)
ferner dcb = dbc (53) man subtrah. so wird
acd = abd (49. Ax.) da nun auch wieder ac = ab und cd = bd, so kongruirt △ acd mit △ abd (51).

Für Fig. 29. ziehe man wieder die Linie cb, und die Winkel c und b werden gleich, wenn man die einzelnen gleichen acb; abc und bcd; cbd (53) zusammen addirt. Nimmt man nun wieder zu ihnen die gleichen Seiten ac; cd und ab; bd von welchen sie eingeschlossen werden, so folgt die Kon-

Kongruenz der Dreyecke wieder wie in den vorigen Fällen.

§. 59.

Zus. In gleichen Dreyecken stehen also gleichen Seiten, gleiche Winkel, und gleichen Winkeln, gleiche Seiten entgegen, und die verschiedene Lage eines Dreyecks ändert an seinen sonstigen Beschaffenheiten nichts.

§. 60.

Anm. Aus der Betrachtung der Fig. 27, 28, 29, ergiebt sich, daß zwey Dreyecke auch alsdann einander gleich werden, wenn 2 Seiten und ein nicht von ihnen eingeschlossener Winkel in beyden gleich sind z. B. a c, a d und a b, a d nebst dem Winkel a c d und a b d; nur wird erfordert, daß von den vorkommenden Seiten diejenigen welche den einen Schenkel des gleichfalls vorkommenden Winkels bilden, Winkel von einerley Art gegen sich über stehend haben, nemlich beyderseits rechte, oder stumpfe oder spitzige; denn wenn Fig. 30, a d c stumpf, und a b d spitzig ist, so werden die Dreyecke a c d und a b d nicht mehr gleich seyn, obschon noch immer a c = a b; a d = a d und c = b wäre. Eben so, beschreibe man Fig. 31. aus d mit einem Halbmesser der kleiner als d a ist, f c b und ziehe a b so, daß sie den Bogen in c und b schneidet. In die Durchschnittspunkte ziehe man d c und d b, so werden die Winkel c b d und b c d gleich (24, 53) und, wie in der Folge bewiesen werden wird, auch zugleich beyde spitzig seyn, d c a als Nebenwinkel von d c b wird also stumpf (20). Nun ist in den beyden Dreyecken a c d und a b d die

die a d nebst dem Winkel a gemeinschaftlich und d c = d b (24) folglich in beyden Dreyecken zwey Seiten und ein nicht von ihnen eingeschlossener Winkel, gleich, aber deswegen doch nicht △ acd = △ abd weil eines ein Theil des andern ist; und diese Ungleichheit rührt daher weil die a d in dem einen Dreyeck einem stumpfen Winkel adc, und in dem andern einem spitzigen a b d entgegen steht. Ein anderer Fall den die vorigen Lehrsäze noch nicht mit enthalten, ist, daß auch 2 Dreyecke alsdann, und zwar ohne alle Einschränkung einander gleich sind, wenn in ihnen 2 Winkel und eine Seite, die nicht, wie in (54) vorausgesetzt wurde, zwischen den Winkeln liegt, gleich sind. Es wird nemlich in der Folge, unabhängig von diesem Satze, bewiesen werden, daß in jedem Dreyeck wenn nur 2 Winkel einander gleich sind, auch alsdann alle 3 gleich sind, und sobald dieß ist, so verwandelt sich dieser Fall in den von (54). Ausserdem ist er auch noch auf eine besondere Art weiter unten im §. 85. bewiesen worden. Auf solche Weise sind unter den obigen Einschränkungen 2 Dreyecke allemal einander gleich, wenn in ihnen 3 Stücke unter welchen wenigstens Eine Seite ist, einander gleich sind. Sind blos alle 3 Winkel gleich, so wird in der Folge gezeigt werden, daß dieß bey den Dreyecken nichts weiter als Aehnlichkeit hervorbringt. Diese Anmerkung habe ich nicht als zum System gehörig hier beygebracht weil manches in ihr angenommen wird, wovon die Gründe erstlich im folgenden vorkommen. Sie schien mir aber nützlich, um vorläufig zu übersehen, was es mit der Congruenz der Dreyecke überhaupt für eine Bewandniß habe.

§. 61.

Aufg. Man soll über oder unter einer gegebenen Linie ab Fig. 25. ein gleichseitiges Dreyeck beschreiben.

Aufl. 1) Man fasse ab mit dem Zirkel und beschreibe damit aus a einen Kreis.

2) Man setze den unveränderten Zirkel in b und beschreibe abermals einen Kreis.

3) Aus dem Punkt c wo sich die Kreise schneiden ziehe man grade Linien nach a und b, so werden diese nebst der ab das verlangte Dreyeck geben.

Beweis. Daß sich die Kreise wirklich schneiden werden, erhellet aus (2-, 26) und wenn dieses ist, so sind die gezogenen Linien als Halbmesser von gleichen Kreisen anzusehen und folglich einander gleich (24).

§. 62.

Aufg. Man soll einen gegebnen Winkel cal Fig. 29. halbiren.

Aufl. 1) Man nehme aus dem Scheitel a mi einerley Eröfnung des Zirkels ac = ab.

2) Man ziehe cb und beschreibe darüber ei gleichseitiges Dreyeck cdb (61).

3) Man ziehe die Linie ad, so ist cad = ba

Beweis. Es sind nach der Auflösung in de beyden Dreyecken acd und abd alle Seiten ei and

ander gleich, folglich auch die in no. 3. der Aufl. genannten Winkel (59).

§. 63.

Zus. Man kann diese Halbirungen nach Gefallen fortsetzen, so erhält man 4, 8 zc. Theile, so daß wenn die Zahl der Halbirungen n ist, die Anzahl der Theile 2^n seyn wird.

§. 64.

Aufg. Eine gegebne Linie ab Fig. 34. zu halbiren.

Aufl. 1) Man beschreibe über ihr ein gleichseitiges Dreyeck.

2) Man halbire den Winkel desselben d der ab gegenüber steht und ziehe die Halbirungslinie von d bis c, so ist ac = cb = $\frac{1}{2}$ ab.

Beweis. Da die ganze ab zwischen den Schenkeln des halbirten Winkels liegt, so werden die Dreyecke adc und dcb entstehen, diese sind congr. (51), folglich auch ac = cb.

§. 65.

Zus. Man kann hier ebenfalls wie in (63) die Halbirungen weiter fortsetzen.

§. 66.

Zus. Weil acd = dcb, so steht die Halbirungslinie dc auf ab senkrecht (20).

§. 67.

Aufg. Aus einem gegebnen Punkt a, in einer gegebnen Linie mn Fig. 35. **ein Perpendikel aufzurichten.**

Aufl. Man sehe die gerade Linie als einen Winkel an (15, 36), dessen Scheitel der gegebne Punkt a ist und dessen Schenkel die Linien am und an sind, und halbire denselben nach (62) so wird ad das verlangte Perpendikel seyn.

Beweis. Die Winkel cad und dab werden itzt Nebenwinkel und sind einander gleich, folglich steht ihr gemeinschaftlicher Schenkel ad, auf mn senkrecht (20).

§. 68.

Aufg. Aus einem gegebnen Punkte d, **auf eine unbegrenzte Linie** mn Fig. 36. **ein Perpendikel zu fällen.**

Aufl. 1) Man beschreibe aus d einen Kreisbogen welcher mn in 2 beliebigen Punkten c, b schneidet (50. III.) und ziehe die Linien dc und db

2) Man halbire den dadurch entstandenen Winkel (62) und ziehe die Halbirungslinie von d bis a, so ist da das verlangte Perpendikel.

Beweis. Die Dreyecke cda und dab sind congruent, also cad = dab, folglich da ein Perpendikel (20).

§. 69.

§. 69.

Anm. Man könnte auch über cb auf der Seite wo d liegt ein gleichseitiges Dreyeck beschreiben, alsdann aber müßte man dc so genommen haben, daß sie der cb nicht gleich würde, indem sonst die Spitze des Dreyecks mit d zusammen fiel und die Lage der da unbestimmt ließ.

§. 70.

Lehrs. Wenn in einem Dreyecke abc Fig. 37. eine Seite bc verlängert wird, so ist der äussere Winkel grösser als der innere welcher der verlängerten Seite entgegen steht.

Beweis. Man halbire die Seite des Dreyecks welche mit der verlängerten zusammen stößt (64), dies geschehe in f. Man ziehe aus dem gegenüber stehenden Winkel b, die Linie bfe und mache fe = fb. Man ziehe ce, dies muß geschehen können nach (10). Nun ist in den Dreyecken baf und fec ausser den Seiten af, fc und bf, fe auch der Winkel afb = efc (39) folglich congr. △ baf mit △ fce (51) mithin ist der Winkel baf = fce. Es ist aber fcd > fce (5. Ar.) also auch fcd > baf (7. Ar.).

§. 71.

Zus. Wenn ac verlängert wird, so ist aus eben dem Grunde bcg > abc; da nun bcg = acd (39), so ist auch acd > abc (7. Ar.). Es ist also der äussere Winkel grösser als jeder der in-

nern die ihm entgegengesetzt, d. i. nicht Nebenwinkel von ihm sind.

§. 72.

Anm. Der obige Beweis läßt sich leicht auch bey den Verlängerungen anwenden, die man in a und b machen kann.

§. 73.

Lehrs. In jedem Dreyecke betragen 2 Winkel zusammen weniger als 180°.

Beweis. $bac < acd$ (70)
$acb = acb$ (3. Ax.)

$bac + acb < acd + acb$ (50. Ax.)
$acd + acb = 180.$

$bac + acb < 180^{\circ}$ (7. Ax.).

§. 74.

Anm. Wenn man den Beweis für (70) auch auf die Fälle erstreckt, welche bey den Verlängerungen der Seiten in a und b vorkommen, so läßt sich auf ähnliche Art zeigen, daß auch $bac + acb$, desgleichen $abc + bca$ d. i. allemal 2 Winkel zusammen $< 180^{\circ}$ sind.

§. 75.

Zus. Es kann also in einem Dreyecke nicht mehr als ein rechter Winkel seyn, denn wenn 2 rechte darinn wären, so machten sie zusammen 180° welches gegen (73) streitet. Aus gleichem Grunde kann auch nicht mehr als ein stumpfer darinne seyn, indem

indem 2 stumpfe zusammen schon mehr als 2 rechte machen. Wenn daher einer ein rechter oder ein stumpfer ist, so sind die beyden andern allemal spitzig. Dies dient zur Bestätigung dessen, was in (43) vorläufig bemerkt wurde.

§. 76.

Lehrs. Aus einem Punkte kann auf eine Linie nicht mehr als ein Perpendikel gefällt werden.

Beweis. Wenn Fig. 36. d a ein Perpendickel ist, und eine andere Linie wie d c oder d b auch noch eins seyn sollte, so müßten in dem △ d c a oder d a b 2 rechte Winkel seyn. Dies streitet aber gegen (75).

§. 77.

Zus. Wenn ein Dreyeck gleichschenklich ist, so ist eine Linie, welche den zwischen den Schenkeln eingeschlossenen Winkel und die demselben entgegenstehende Grundlinie halbirt, mit dem Perpendikel welches aus der Spitze des Winkels auf die Grundlinie gefällt werden kann, einerley (76).

§. 78.

Lehrs. Wenn in einem Dreyecke a b c, Fig. 38. eine Seite grösser ist, als eine andere, so ist auch der Winkel welcher der grössern gegen über steht, grösser als der, welcher der kleinern gegenüber steht.

Beweis. Es sey $ac > cb$, man fasse cb und schneide damit am auf ca ab, so ist

$cmb = cbm$ (3. Ar.)
aber $cmb > cab$ (70)

folglich $cbm > cab$ (7. Ar.)
also noch vielmehr $cba > cab$.

§. 79.

Lehrs. Wenn in einem Dreyeck ein Winkel grösser ist als ein anderer, so ist auch die dem grössern entgegenstehende Seite grösser, als die welche dem kleinern entgegen steht.

Beweis. Es sey $abc > bac$, so muß, wenn nicht $ac > cb$ seyn soll, entweder $ac = cb$; oder $ac < cb$ seyn; das erstere kann aber nicht seyn, weil sonst die erwehnten Winkel auch gleich seyn müßten (53), das letztere auch nicht, weil sonst $abc < bac$ seyn müßte (78); folglich bleibt nur der Fall übrig, daß $ac > bc$ sey.

§. 80.

Zus. In einem rechtwinklichen Dreyeck cad Fig. 40. ist also jedes Perpendikel cd, ad, kleiner, als die dem rechten Winkel gegenüber stehende Seite ac, welche man Hypothenuse nennt (75).

§. 81.

Zus. Die kürzeste Linie welche von einem Punkte c auf eine Linie mn gezogen werden kann, ist das Perpen-

Perpendickel c d; man nennt es die Entfernung zwischen dem Punkt c und der Linie m n.

§. 82.

Zus. Je weiter die Linien c a, c m von d in die Linie m n gezogen werden, desto långer werden sie. Wenn nemlich bey d ein rechter Winkel ist, so ist c a d spitzig (7[illegible]); c a m stumpf (20, 70) c m a wieder spitzig u. s. w. Es steht also die weiter von d durch m n gehende Linie einem grössern Winkel entgegen als die näher durchgehende und also ist jene grösser als diese (79).

§. 83.

Zus. Auch die Winkel welche diese Linien mit der m n machen, wachsen beståndig auf der einen und nehmen ab auf der andern Seite, so daß es in der unbegrenzten d m nicht zwey Punkte giebt, in welchen eine aus c gezogene Linie einerley Winkel mit d m machen könnte (70).

§. 84.

Zus. Auf der andern Seite von c d kann man eben dieselben Betrachtungen anstellen, und können hier wieder eben solche Linien und Winkel entstehen, wie auf der vorigen Seite, wenn man nur dieselbigen Entfernungen von d, in der d n beybehålt.

§. 85.

Lehrs. Wenn in zweyen Dreyecken abc und $\alpha\beta\gamma$. Fig. 41, 42 zwey Winkel und eine Seite, welche nicht ein gemeinschaftlicher Schenkel dieser beyden Winkel ist, wie in (54) einander gleich sind, so kongruiren doch auch diese Dreyecke.

Beweis. Es sey $ab = \alpha\beta$; $a = \alpha$ und $c = \gamma$, welche beyderseits spitzig seyn müssen (75) so läßt sich a auf α und ab in $\alpha\beta$ legen, und es wird ac in $\alpha\gamma$ fallen; nur fragt sichs noch, ob auch c in γ falle? Man lasse deshalb von b und β die Perpendikel bd und $\beta\delta$ herab (68), so werden diese einander decken (76) und so wohl c als γ werden auf der Seite des Perpendikels liegen, welche der wo a und α liegt, entgegengesetzt ist. Nun giebt es aus b, β welche itzt aufeinander liegen, nicht mehr als Eine Linie, welche in der unbegrenzten dc oder $\delta\gamma$ einen gegebnen Winkel macht (83, 84); folglich muß c mit γ zusammen fallen.

§. 86.

Lehrs. In jedem Dreyeck ist I) die Summe zweyer Seiten jedesmal grösser II) die Differenz zwischen ihnen kleiner, als die dritte. Z. B. Fig. 39. $ac + cb > ab$. und $ac - cb < ab$.

Beweis Für I. Man verlängere die eine von den beyden Seiten ac nach d, so daß $cd = cb$ wird, so ist $ad = ac + cb$; man ziehe db, so

ist

ist c d b = c b d (53) aber a b d > c b d (5. Ax.) folglich auch a b d > c d b (7. Ax.) mithin a d > a b (79) d. i. a c + c b > a b. Eben so läßt sich der Satz auch von a b + a c und a b + b c beweisen.

Für II. Es sey Fig. 38. a c − c b = a m, so ist c m b = c b m (53) mithin c m b spitzig (75), folglich a m b stumpf (20) folglich a m b > m b a (75) folglich a m, d. i. a c − c b < a b (79).

§. 87.

Zus. Wenn man also aus 3 gegebnen Seiten ein Dreyeck verzeichnen soll, so müssen je 2 derselben allemal zusammen grösser seyn, als die dritte.

§. 88.

Aufg. Aus zwey gegebnen Seiten ein gleichschenkliches Dreyeck zu zeichnen. Fig. 12.

Aufl. 1) Wenn die kleinere mehr als die Hälfte von der grössern beträgt, so nehme man eine von ihnen nach Gefallen für die Grundlinie an, sonst aber wähle man zur Grundlinie die kleinere.

2) Mit der andern beschreibe man aus den Endpunkten der Grundlinie, Kreise und verfahre übrigens wie in (61).

Beweis. Die Einschränkung in no. 1. hat ihren Grund in (86); denn wenn man die mehr als doppelt

doppelt so große zur Grundlinie nehmen wollte, so würden die Kreise einander nicht schneiden; übrigens ist der Beweis wie in (61).

§. 89.

Anm. Wenn man auf (no. 1.) Rücksicht nimmt, so kann man bey den Aufgaben (62, 64) auch gleichschenklichte Dreyecke statt der gleichseitigen beschreiben.

§. 90.

Aufg. Aus 3 gegebnen Seiten ein Dreyeck zu beschreiben. Fig. 13.

Aufl. Wenn bey denselben auf (86) Rücksicht genommen worden ist, so nehme man eine nach Gefallen zur Grundlinie und beschreibe aus dem einen Endpunkte derselben mit der zweiten, und aus dem andern mit der dritten einen Kreis. Uebrigens verfahre man wie in (61).

§. 91.

Anm. Es ist in der Ausübung nicht nöthig die ganzen Kreise zu beschreiben, sondern man zieht blos in der Gegend wo nach dem Augenmaaße die Kreise einander schneiden werden, ein paar Bogen die sich schneiden.

§. 92.

Aufg. An eine gegebne Linie in einem gegebnen Punkt einen gegebnen Winkel zu legen.

Aufl. Wenn der gegebne Winkel in Fig. 41, a, und die gegebne Linie $\alpha\gamma$ in Fig. 42. ist, wo der

Winkel

Winkel an α gelegt werden soll, so ziehe man 1) durch seine Schenkel eine Linie b c, daß man ein Dreyeck erhält.

2) Beschreibe man über $\alpha\gamma$, die man nach Erfordern verlängern oder verkürzen könnte, ein Dreyeck das eben die Seiten hat, als das in no. 1. erhaltene, so wird es auch die Winkel des vorigen und mithin $\alpha = a$ haben.

Beweis. Er beruht auf (59).

§. 93.

Lehrs. Ein paar Linien a b **und** c d Fig. 43. **die von einer dritten** e f **so geschnitten werden,**

daß I. die innern entgegengesetzten Winkel g h d **und** h g b **zusammen** 180° **oder so viel als 2 rechte machen,**

oder: II. der äussere Winkel e g b = g h d **dem innern entgegengesetzten,**

oder: III. die Wechselwinkel a g h **und** g h d, **einander gleich sind, sind in allen diesen Fällen parallel.**

Beweis. Für I. Zuvörderst ist zu bemerken, daß wenn auf der einen Seite von g h die im Satz genannten Winkel zweyen rechten gleich sind, dieses auch allemal von den beyden innern die auf der andern Seite von g h liegen, der Fall seyn wird.

Es

Es ist nemlich ghd + chg = 180°⎫
Eben so hgb + hga = 180°⎭ (30)
addirt:

also ghd + chg + hgb + hga = 360°
subtr. ghd + hgb = 180°

also chg + hga = 180°

Wenn nun diese Linien nicht parallel wären so müßten sie auf einer von beyden Seiten nach genugsamer Verlängerung zusammen stoßen, folglich ein Dreyeck bilden in welchem 2 Winkel zusammen so groß, als 2 rechte wären, welches gegen (75) streitet; also sind sie parallel (18).

Für II. Es ist egb + hgb = 180° (30)
wenn nun egb = ghd

so ist auch ghd + hgb = 180° (3. Ax.
und der Beweis ist nun wieder wie in I.

Für III. Es ist agh = egb (39)
Ist nun agh = ghd nach d. Voraus

so ist egb = ghd (6. Ax.) folglich
wie in II. ghd + hgb = 180° folglich der Beweis wieder wie in I.

§. 94.

Aufg. Mit einer gegebnen Linie cd eine andere durch einen gegebnen Punkt g parallel zu ziehen.

Aufl.

Aufl. 1) Man ziehe nach Gefallen eine Linie eh durch den gegebnen Punkt g bis sie die cd erreicht.

2) Man lege einen Winkel so groß als ghd an g so, daß dessen Schenkel entweder eg und gb; oder ga und gh werden, so wird ag, gb mit cd parallel seyn.

Beweis. Er fließt aus (93. II u. III.)

§. 95.

Anm. In der Ausübung pflegt man sich zum Ziehen der Parallelen eines besondern Werkzeugs zu bedienen, welches aus 2 miteinander verbundenen beweglichen Linealen besteht. Noch leichter lassen sich Parallelen mittelst eines Lineals und eines daran herunter zu schiebenden Winkelhakens ziehen. Von der Anwendung dieser Werkzeuge läßt sich mündlich nähere Anleitung geben.

§. 96.

Zus. Wenn ab mit cd nicht parallel ist, so stößt sie allemal auf einer Seite mit cd zusammen, wenn nur beyde Linien lang genug genommen werden und der Abstand beyder Linien von einander kann hierein keinen Einfluß haben. In welcher Entfernung von einem Punkt aber, z. B. von h, dieser erste Zusammenstoß geschieht, läßt sich durch kein Maas bestimmen, weil man sich immer eine Verlängerung der Linie in welcher der Zusammenstoß geschieht, und auf solche Art eine Entfernung von h gedenken kann, die grösser ist als die vorige;

man

man sagt deshalb der erste Zusammenstoß geschieht unendlich weit von h; und Linien die nur in einer solchen unendlichen Entfernung zusammenstoßen, sind von Parallelen selbst nicht mehr zu unterscheiden.

§. 97.

Zus. Hinwiederum wird, wenn 2 Linien parallel sind, der äussere Winkel dem innern, oder der eine Wechselwinkel dem andern ꝛc. gleich seyn, wofern es nur durch g keine andere Linie, wie etwa gl, Fig. 44. giebt, welche ebenfalls cd nie schneidet. Um hierüber nähere Untersuchung anstellen zu können, führe man ab und gl mit unveränderlichem Winkel an ef, so weit herunter, daß vom ersten Element der gl, der eine Endpunkt in i und der andere in q liege (6). Dies muß möglich seyn weil gl nach der Voraussſ. eine von gb verschiedene Linie ist. ab hat sich also der cd itzt so genähert, daß sie in mn liegt und bey solchen nahen Parallelen wird zufolge dessen was so eben gesagt worden, keine Linie dazwischen hineingehen, welche nicht die cd schnitte und aus gleichem Grunde auch keine zwischen iq und is, weil man ic schon als eine annehmen kann, die näher als irgend eine angebliche, an is liegt. Itzt also wird qis = iqh = rqt seyn.

§. 98.

Lehrs. Wenn zwey Linien gl, hd, auf einer dritten ef so stehen, daß die innern entgegen-

ʒengeſetzten Winkel zuſammen weniger als 2 ·echte betragen, ſo ſchneiden ſie einander bey ʒenugſamer geradelinigter Verlangerung.

Beweis. Es ſey ql unter den Umſtänden wel- he der vorige Zuſatz annimmt, ſo ſchneidet ſie, venn g bis nach i gerückt iſt, die cd. Man be- chreibe über iq das Dreyeck isq, ſo daß is = hq ·oird; da nun nach (97) auch hqi = qis, ſo vird △ qhi mit △ qis kongruiren (51). Man ·ge das ganze Viereck hqsi über is in isvk und qsk rechts neben sq in qrts, desgleichen auch tstwv und ksvp, ſo wird jedes aus 2 Dreyecken eſtehen, die ſämmtlich mit △ hqi, folglich auch nter ſich ſelbſt kongruiren, und die 3 Winkel nter kt, von welchen s der gemeinſchaftliche 5cheitel iſt, werden zuſammen ſo viel betragen, ls die 3 rechts neben kh liegenden, welche i um gemeinſchaftlichen Scheitel haben (59). Da un kih eine gerade Linie iſt, ſo wird auch kst ne ſeyn (36, 8), und auf eben dieſelbe Art ergiebt ch, daß auch vsq; hqt; iqr, gerade Linien 1d. Schiebt man nun das Viereck iqsk mit inem anhangenden qrts an fe hinauf, bis bey: in die Lage von ktwp kommen, ſo wird iqr kst fallen, folglich iq wenn es in gerader ichtung verlängert wird, auch itzt noch die cd ;neiden. Fährt man nun mit dieſem Fortrücken 1d geradlinigtem Verlängern immer auf die vor- ſchriebene Art fort, ſo kommt man endlich mit

iq in die Lage gl, und gl schneidet also wenn es genugsam, und geradlinigt verlängert wird allemal die unbegrenzte cd. Da nun hier ange nommen worden, daß die gl unendlich nahe a gb läge, oder einen unendlich kleinen Winkel mi ihr mache, so wird sie die cd um noch so vie gewisser schneiden, wenn sie einen größern Wink mit gb hereinwärts nach cd, macht.

§. 99.

Zus. Wenn das nächste Element von iq nich die Lage von qr, sondern etwa von qt hätt mithin iqr eine krumme Linie wäre (8) s würde eine solche verlängerte iq die cd nic mehr schneiden, und sobald der Punkt i mit se ner anhängenden Linie bis nach k hinaufgesch ben wäre, so würde sich diese iqt gänzlich vo cd trennen, obgleich der Winkel des ersten El ments mit ef noch immer den vorigen Wink machte; es kommt also hier darauf an, ob g gerade oder krumm ist.

§. 100.

Anm. Es kommen in der höhern Geometrie wir lich krumme Linien vor, welche sich einer gerad zwar immer mehr nähern, aber sie dennoch n erreichen, so weit sie auch nach dem Gesetz ihr Krümmung verlängert werden, und ohngeacht die ersten Elemente der krummen und geraden m einer dritten, Winkel machen, die zusammen w niger als 2 rechte betragen. Indessen thun d

s

ses nicht alle krumme Linien, sondern blos die welche Asymptoten haben, wie ich in meiner Dissert: Tentamen, ex notione lineae rectae distincta et completa, axiomatis XI. Euclidis, veritatem demonstrandi, Ienae 1789. umständlicher gezeigt habe. In eben dieser Schrift sind auch die Gründe des Beweises (98) weiter auseinander gesetzt, wiewohl ich den Beweis selbst in gegenwärtiger Schrift noch etwas einleuchtender als dort, zu machen gesucht habe. Wegen der Schwierigkeiten die er in Rücksicht des Unendlichkleinen das man bey ihm nothwendig zu Hülfe nehmen muß, hat, ist der ihm zugehörige Satz vom Euklid und andern berühmten Mathematikern blos als Grundsatz aufgeführt worden. Viele haben schon Versuche gemacht ihn förmlich zu beweisen, immer aber hat man Etwas an den Beweisen auszusetzen gefunden; weshalb ich denn meine geehrtesten Leser bitte, im Fall ihnen auch der gegenwärtige Beweis nicht ganz einleuchten sollte, den Satz ebenfalls als einen Grundsatz zu betrachten, denn an seiner Wahrheit selbst, hat noch nie jemand gezweifelt.

§. 101.

Lehrs. Wenn ein paar Parallelen ab, cd. Fig. 43. von einer dritten Linie ef durchschnitten werden, so machen die innern entgegengesetzten Winkel zusammen so viel als 2 rechte; der äussere ist dem innern entgegengesetzten, und ein Wechselwinkel dem andern gleich.

Beweis. Wenn dieses bey den genannten Linien nicht der Fall wäre, so müßte es eine andere

Parallele durch g mit cd geben, bey welcher die Behauptung des Satzes statt fände, da es nun keine solche giebt (98), so muß auch die Behauptung schon bey der ab statt finden.

§. 102.

Lehrs. Parallelen zwischen Parallelen ac, bd Fig. 45. sind gleich.

Beweis. Man ziehe cb, so ist in den Dreyecken acb und cbd die cb beyden gemein; bcd = abc und acb = cbd (101) folglich kongruiren die 2 Dreyecke (54) und ab = cd; ac = bd.

§. 103.

Lehrs. Zwey Parallelen ab, cd Fig. 46. haben in allen ihren Punkten gleiche Entfernungen von einander.

Beweis. Man lasse von den Punkten e, g die Perpendikel ef, gh auf cd herab (68) so stellen diese die Entfernungen dieser Punkte von cd vor (81). Da nun efh = ghd (33) so ist ef parallel mit gh (93) folglich ef = gh (102). Da bey h ein rechter Winkel ist, und h + g = 2 rechten (101) so ist auch g ein rechter Winkel, desgleichen auch e, folglich stellen fe und gh auch die Entfernungen der Punkte f und h von der ab vor (81).

§. 104.

Lehrs. Wenn in einem Vierecke abcd die einander entgegenstehenden Seiten gleich sind, so laufen sie auch mit einander parallel.

Beweis. Es sind alsdann in den Dreyecken acb und cbd alle Seiten gleich, folglich auch die gleichnahmigen Winkel, und da diese als Wechselwinkel an der cb können angesehen werden, so sind die Vierecksseiten parallel (93).

§. 105.

Zus. Man nennt solche Vierecke Parallelogrammen; zu diesen gehört also das Quadrat, die Raute, das Rechteck und Rautenähnliche Viereck (44). Jedes derselben wird durch die Diagonale cb oder ad in 2 gleiche Theile getheilt; seine gegenüberstehenden Winkel sind gleich, und seine innern an einer Seite liegenden machen zusammen 180°.

§. 106.

Zus. Wenn in einem Parallelogramm ein Winkel ein rechter ist, so sind es auch die übrigen, und dies ist der Fall im Quadrat und Rechteck.

§. 107.

Aufg. Aus 2 gegebenen Seiten und dem Winkel den sie einschliessen, ein Parallelogramm zu zeichnen.

Aufl. An die eine Seite lege man den gegebenen Winkel (92) und mache dessen andern Schenkel der andern Seite gleich, so ergiebt sich ein Dreyeck (51); auf dieses setze man noch eins das eben die Seiten hat (90), und wo diese gleichen Seiten einander gegenüber zu liegen kommen.

Beweis. Er fließt unmittelbar aus (105).

§. 108.

Lehrs. In jedem Dreyecke abc Fig. 47. ist die Summe aller 3 Winkel zweyen rechten oder 180° gleich.

Beweis. Man ziehe durch c eine Parallele mn mit ab (94) so ist $a = \alpha$; $b = \beta$ (101) und $\alpha + c + \beta = 180°$ (30) folglich auch $a + b + c = 180°$ (3. Ar.).

§. 109.

Zus. Wenn man im Dreyeck irgend eine Seite verlängert, so ist der äussere Winkel, so groß als die beyden innern ihm entgegengesetzten zusammen. Es sey z. B. dieser äussere Winkel dcb; dieser besteht aus $\beta + \gamma$; es war aber $\beta = b$ und γ ist $= \alpha$ (101) folglich $bcd = a + b$.

§. 110.

Zus. Ist einer von den 3 Winkeln ein rechter so machen die übrigen beyden spitzigen zusammen auch so viel als ein rechter, und wenn das Drey-

ei

eck gleichschenklich ist, so ist jeder von den spitzigen halb so groß als ein rechter, d. i. 45°.

§. 111.

Zus. In einem gleichseitigen Dreyeck macht jeder Winkel 60° (56, 108).

§. 112.

Aufg. Aus einem gegebenen Winkel in einem gleichschenklichen Dreyecke die beyden übrigen zu finden.

Aufl. I. Wenn der an der Spitze gegeben ist, so halbire man ihn, und ziehe diese Hälfte von 90° ab; so ist der Rest die Größe eines jeden an der Grundlinie.

II. Wenn einer von denen an der Grundlinie gegeben ist, so ziehe man ihn gleichfalls von 90° ab, und verdoppele den Rest, so hat man den an der Spitze.

Beweis. Er ergiebt sich von selbst aus den vorigen Zusätzen. Z. B. cbd Fig. 35. sey 80° so ist c = 50 und b = 50 u. s. w.

§. 113.

Zus. Wenn in irgend einem Dreyeck 2 Winkel gegeben sind, so findet sich allemal der dritte, wenn man die Summen der gegebenen von 180° abzieht; oder wenn einer gegeben ist, so findet

man die Summe der übrigen wenn man den gegebenen von 180° abzieht.

§. 114.

Zus. Wenn also in zweyen Dreyecken 2 Winkel einander gleich sind, so ist auch der dritte in dem einen, dem dritten in dem andern gleich.

§. 115.

Aufg. In einem gegebenen Vieleck die Summe aller Winkel zu finden. Z. B. in a b c d e f g Fig. 48.

Aufl. Man multiplicire 180° durch die Zahl der Seiten und ziehe vom Product 360° ab, so ist der Rest die verlangte Summe. Z. B. im 7 Eck hat man (7. 180°) — 360° = 900°.

Beweis. Man ziehe aus einem im Vieleck willkührlich angenommenen Punkt m, nach allen Ecken gerade Linien, so entstehen eben so viel Dreyecke als Seiten sind. Wenn nun die Zahl der Seiten = n, so ist die Summe aller Winkel die in diesen Dreyecken vorkommen = n. 180° (108). Da nun die um m herum befindlichen, deren Summe 360° macht (37), nicht mit zur Summe der Vieleckswinkel gehören, so muß man sie vom vorigen Product abziehen.

Drückt man 360° durch 2. 180° aus, so läßt sich die Regel so vorstellen (n. 180°) — (2. 180°) = (n — 2) 180° (132. Nr.).

§. 116.

§. 116.

Zus. Ist das Vieleck ein reguläres, (45) so wird der Vieleckswinkel desselben $= \frac{n-2}{n} 180^\circ$. z. B. im Quadrat (44) $= 90^\circ$

§. 117.

Anm. Wenn man im irregulären Vielecke keinen Punkt finden könnte aus welchem sich nach allen Ecken gerade Linien ziehen ließen, wie z. B. in mnopqr Fig. 49. wo hohle und erhabene Winkel untereinander vorkommen, so kann man es durch eine Linie wie qn theilen, und 2 Punkte s und t statt eines annehmen; alsdann bekommt man 2 Dreyecke, und mithin 2. 180° mehr, als man bekommen hätte wenn nur ein einziger Punkt wäre angenommen worden, dafür werden aber auch beym nachmaligen Abziehen statt einmal, nun 2mal 360° abgezogen, wodurch also jenes Uebermaaß wieder aufgehoben wird.

§. 118.

Lehrs. Parallelogrammen die auf einer Grundlinie und zwischen einerley Parallelen stehen, sind einander gleich.

Beweis. I. Fall. Es seyen die Parallelogrammen Fig. 50. abde und abcd, so ist in den Dreyecken ade und bcd, ae = db; ad = bc; ab = ed desgleichen ab = dc, (105) folglich ed = dc (6. Ax.)

also △ ade = △ bcd (58)
add. △ abd = △ abd (3. Ar.)

also in der Figur abde = abcd.

II. Fall. Fig. 51. Es ist wieder af = bd; ae = bc; fd = ec, also auch fd — ed = ec — ed (49. Ar.) d. i. fe = dc folglich △ aef = △ bcd (58); wenn man nun zu jedem das Trapez abde addirt, so wird abdf = abce.

III. Fall. Fig. 52. Man hat wie vorhin af = be; ad = bc; fe = dc folglich fe + ed = dc + ed (49. Ar.) d. i. fd = ec

folglich △ adf = △ bce (58)
subtr. △ egd = △ egd

also agef = bgdc
add. △ abg = △ abg

abef = abcd

§. 119.

Anm. Ein Perpendikel auf die Grundlinie einer Figur von der ihr gegenüberstehenden Grenze, nennt man die Höhe derselben, da nun Perpendikel zwischen Parallelen gleich sind (103) so sagt man: Parallelogrammen von einerley Grundlinie und Höhe sind gleich.

§. 120.

Lehrs. Wenn zwey Parallelogrammen gleich sind, und auf einerley Grundlinie stehen,

hen, so liegen die derselben gegenüberstehenden Seiten in den geradlinigten Verlängerungen derselben von einander, und die Parallelogrammen liegen mithin zwischen einerley Parallelen.

Beweis. Es sey Fig. 53. abcd = abih, aber es sey hi nicht die Verlängerung von dc, so ziehe man die Verlängerung von dc, diese sey cfg, so muß hi so gut parallel mit ab seyn, als es fg ist (105) und nach der Voraussetzung muß sowohl abhi als nach (118) abgf = abcd seyn, welches nicht anders möglich ist, als wenn abfg und abih, einerley sind, denn wenn dies nicht seyn sollte, so müßte der Theil dem Ganzen gleich seyn, welches gegen (5. Ar.) streitet.

§. 121.

Zus. Dreyecke von gleicher Grundlinie und Höhe, oder zwischen einerley Parallelen sind ebenfalls gleichen Inhalts. Denn man kann nach (105) jedes Dreyeck als die Hälfte eines Parallelogramms ansehen, welches einerley Grundlinie und Höhe mit demselben hat; was also von den Ganzen galt, muß auch von den Hälften gelten (45. Ar.).

§. 122.

Lehrs. Wenn man in der Diagonale ac eines Parallelogramms abcd Fig. 54. einen willkührlichen Punkt i annimmt, und durch denselben mit den Seiten Parallelen eg und

hf

hf zieht, so sind von den 4 hierdurch entste-henden Parallelogrammen die beyden, in welchen von der Diagonale nichts enthalten ist, einander gleich.

Bew. △ adc = △ abc (105)
△ aei + △ ihc = △ afi + △ igc (105, und 49. Ar.)

subtr. giebt eihd = fbgi

§. 123.

Aufg. Ein gegebenes Dreyeck kli Fig. 55. in ein Parallelogramm zu verwandeln das einen gegebnen Winkel ifb und eine gegebene Seite fb hat.

Aufl. 1) Man halbire die Grundlinie des Dreyecks (64); dies geschehe in e.

2) Man ziehe durch die Spitze k eine Parallele mit der Grundlinie kc.

3) Durch e ziehe man bis an die Parallele eine Linie ed so, daß sie mit der Grundlinie den gegebenen Winkel macht (92).

4) Man verlängere die Grundlinie, bis ig so groß, als die gegebene Seite wird.

5) Man ziehe durch i und g Parallelen mit ed bis an kc.

6) Man

6) Man ziehe die Diagonale ci und verlängere sie unterhalb lg so weit, bis sie die gleichfalls zu verlängernde de in a schneidet.

7) Man ziehe ab parallel mit lg, und verlängere hi nebst cg bis sie die ab schneiden, so wird fbgi das verlangte Parallelogramm seyn.

Beweis. Das Parallelogramm eihd = △ kli weil es die Hälfte von einem ist, welches gleiche Grundlinie und Höhe mit △ kli hat. Ferner ist eihd = fbgi (122)

§. 124.

Aufg. Ein Vieleck von einer gewissen Anzahl Seiten in ein anderes zu verwandeln, welches eine Seite weniger hat.

Aufl. Es sey das Vieleck abcde Fig. 56. Man ziehe 1) eine Linie aus einem Winkel in den andern, daß ein Dreyeck, wie hier edc abgeschnitten wird.

2) Man ziehe durch die Spitze des Dreyecks eine Parallele df mit ec.

3) Man verlängere diejenige Seite an deren Ende die Linie welche das Dreyeck abschnitt, gezogen wurde, die aber nicht mit zum Dreyeck gehört, bis an die Parallele in f.

4) Man ziehe ef, so wird abfe eine Seite weniger haben.

Beweis. Man hat im Vieleck statt des △ edc das △ efc erhalten, welches dem vorigen gleich ist (121).

§. 125.

Zus. Mit dieser Verminderung der Seiten kann man fortfahren bis man auf das Dreyeck kommt. Da man nun dieses nach (123) in ein beliebiges Parallelogramm, und dieses wieder in ein Rechteck verwandeln kann, wenn man zum Winkel ifb in (123) einen rechten wählt, so kann auf solche Art jedes Vieleck in ein Rechteck verwandelt werden, welches eine gegebene Seite hat.

§. 126.

Zus. Man kann auch das zu verwandelnde Vieleck durch Diagonalen in Dreyecke theilen, und jedes Dreyeck nach (123) in ein Parallelogramm von bestimmten Winkel und Seite verwandeln, so lassen sich am Ende alle diese Parallelogramme an der gemeinschaftlichen Seite und im gemeinschaftlichen Winkel in ein einziges zusammensetzen.

§. 127.

Lehrs. In einem rechtwinklichen Dreyeck abc ist das Quadrat der Hypothenuse ab, gleich den Quadraten der beyden Perpendikel oder Katheten ac und cb, die den rechten Winkel einschließen, d. i. abfi = cbhd + defg.

Beweis.

Beweis. Man bemerke vorläufig, daß weil dc mit hb parallel, kad = abh (101); eben so auch lac = mfg mithin auch dam = hbi und cab = gfi weil diese Winkel übrig bleiben, wenn man die vorhin genannten gleichen Winkel von 90° als dem Quadratwinkel (116) abzieht. Ferner ist ade eine gerade Linie, weil bey d auf beyden Seiten rechte Winkel sind; und eben so wird auch ghi gerade seyn, wenn bhi ein rechter Winkel wird (116). Endlich da ed = ac so wird ed + da = ac + da (49. Ar.) oder ea = dc = hb (44).

Wenn man nun die Figur betrachtet, so liegen von den Quadraten der Katheten schon die Stücken abhm und fgm auf dem Quadrat der Hypothenuse; die Stücken acb und afe aber liegen noch ausser demselben; dagegen ist vom Raum des Quadrats der Hypothenuse noch fgi und bhi übrig; wenn also diese Räume einander gleich sind, so kann man sie für einander substituiren (3. Ar.).

Es ist aber in den Dreyecken aef und bhi, nach den vorläufigen Bemerkungen, und aus dem Begriff des Quadrats (44) ae = bh; af = bi der Winkel daf = hbi folgl. △ eaf congruent mit △ hbi (51) auch der Winkel h = e = 90° (116).

Fer-

Ferner in den Dreyecken acb und fgi, ac = fg; ab = fi (44) und Winkel cab = gfi, also △ acb = △ fgi (51).

§. 128.

Anm. Diesen Satz soll Pythagoras zuerst erwiesen und den Musen, wegen der Wichtigkeit desselben in der Mathematik, eine Hekatombe geopfert haben. Daher er auch Theorema Pythagoricum; Hecatombe dignum, und Magister Matheseos ist genannt worden.

§. 129.

Lehrs. Wenn man 3 Quadrate von welchen Fig. 58. die beyden face + ckib dem dritten abhg gleich sind, mit ihren Ecken so aneinander legt, daß ihre Flächen ausser einander fallen, so schließen die Seiten der beyden kleineren einen rechten Winkel acb ein.

Beweis. Gesetzt acb wäre kein rechter Winkel, so rücke man die beyden kleinern Quadrate so aneinander, daß ihre Seiten einen rechten Winkel machen, und ihre andern Endpunkte auch noch in ab (oder deren Verlängerung) liegen. Diese Lage sey itzt nalm und ldpo so, daß bey l der rechte Winkel, und ad die Hypothenuse wäre, alsdann müßte nach (127) almn + ldpo = adqr seyn; Nach der Voraussetzung aber ist auch almn + ldpo = abhg, also müßte itzt der Theil dem Ganzen gleich seyn, welches gegen (5. Ar.) streitet.

tet. Folglich giebt es sonst keinen rechten Winkel als a c b.

§. 130.

Aufg. Verschiedene Quadrate in ein einziges zu verwandeln.

Aufl. 1) Man setze von zweyen die Seiten in einem rechten Winkel aneinander, und ziehe die Hypothenuse.

2) An die Hypothenuse setze man eben so die Seite des dritten, und ziehe abermals die Hypothenuse, so wird sie die Seite eines Quadrats seyn, das so groß als jene drey ist, und auf diese Art kann man fortfahren bis man sie alle gehabt hat.

Beweis. Er folgt unmittelbar aus (127).

§. 131.

Zus. Um ein Quadrat zu verdoppeln, ziehe man seine Diagonale, so ist diese die Seite des doppelten; um es zu halbiren, nehme man die Hälfte seiner Diagonale, so ist sie die Seite des halben Quadrats. Die halbe Diagonale ist nemlich anzusehen, als eine Hypothenuse von 2 Quadratseiten, deren Quadrate zusammen halb so groß, als das zu halbirende Quadrat sind.

§. 132.

Aufg. Ein kleineres Quadrat von einem größern so abzuziehen, daß die Differenz wieder ein Quadrat wird. Z. B. F. 58. face von abhg.

Aufl. 1) Man setze 2 unbegrenzte Linien ac, cb in einen rechten Winkel c zusammen.

2) Man trage in den einen Schenkel von c aus, die Seite des abzuziehenden Quadrats, ca.

3) Man fasse die Seite des großen Quadrats mit dem Zirkel, setze den einen Fuß in a und schneide mit dem andern in den andern Schenkel des rechten Winkels bey b, so wird cb die gesuchte Seite der Differenz seyn.

Beweis. Er fließt gleichfalls unmittelbar aus (127).

§. 133.

Lehrs. Wenn ein Kreis von einer Linie fd F. 59. in den Punkten a und b geschnitten wird, so sind alle ihre zwischen a und b liegenden Punkte näher beym Mittelpunkt, und alle ausserhalb ab liegenden weiter von demselben entfernt, als jeder Punkt des Umkreises.

Beweis. Jeder Punkt des Umkreises ist um den Halbmesser, vom Mittelpunkt entfernt (23). Nun sey der Punkt innerhalb ab in e, und der ausserhalb in d; man ziehe ce und cd nebst den Halb=

Halbmessern cb und ca, so ist cab = cba (53) aber cea > cba (70) folglich auch > cab (7. Ar.) mithin ac > ce.

Ferner: Wenn cab = cba, so ist cba spitzig (75), folglich cbd stumpf (30), folglich cbd > cdb (75), mithin cd > cb (79).

§. 134.

Zus. Es können also blos die Punkte a und b gleiche Entfernungen mit den Punkten des Umkreises haben, und deshalb kann die gerade Linie den Kreis nur in 2 Punkten schneiden. Rückt fd so weit herunter, bis sie mn wird, wo die Punkte a und b in einem Punkt des Umkreises a zusammen fallen, so wird sie eine Tangente (27).

§. 135.

Lehrs. I. Wenn aus dem Mittelpunkt c eines Kreises Fig. 60. ein Perpendikel auf die Sehne ab eines seiner Bogen adb gelassen wird, so halbirt es diese Sehne und in der Verlängerung auch den Bogen.

II. Wenn aus dem Mittelpunkt auf die Mitte der Sehne oder des Bogens eine Linie gezogen wird, so steht sie auf der Sehne senkrecht.

III. Wenn ein Perpendikel auf die Mitte einer Sehne gesetzt wird, so geht es verlängert durch den Mittelpunkt des Kreises.

Beweis. Für I. Man ziehe nach den Endpunkten der Sehne, die Halbmesser ca, cb, so erhält man ein gleichschenkliches Dreyeck, in welchem ae = eb (77). Da nun auch der Winkel ace = ecb (77), so ist auch das Maaß des einen ad = dem Maaß des andern db (28).

Für II. In wiefern ce auf der Mitte von ab steht, folgt der Beweis wieder aus (77); in wiefern aber die Linie bey d in die Mitte des Bogens adb trift, ist der Winkel acd = dcb (28). Da nun ac = cb und cd = cd, so congruirt △ ace mit △ ecb (51), folglich sind die Winkel bey e gleich, und ce ein Perpendikel (20).

Für III. Wenn die ce welche nach I durch den Mittelpunkt gieng und ab senkrecht halbirte, nicht mit dem Perpendikel das man in der Mitte von ab aufrichten kann, einerley wäre, so müßte man aus e mehr als ein Perpendikel aufrichten können; aber alle Linien aus e über ab die nicht mit dem Perpendikel ec einerley sind, fallen zwischen ce und eb oder ea und machen mit diesen keine rechte, sondern schiefe Winkel, und sind demnach keine Perpendikel, (20) also ist das Perpendikel von der Mitte der Sehne kein anderes als ec welches durch den Mittelpunkt geht.

§. 136.

§. 136.

Zus. Die Sehne ab gehört ausser dem Bogen adb auch afb zu, und dieser wird durch die Verlängerung von ec in f ebenfalls halbirt; denn da der Winkel ace = ecb war, so sind auch die Nebenwinkel acf und fcb gleich (49. Nr.); folglich af = fb (28).

§. 137.

Aufg. Durch 3 gegebne Punkte a, b, c Fig. 61. **die nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.**

Aufl. 1) Man beschreibe aus den Punkten mit dem Zirkel oberhalb und unterhalb ihrer Entfernungen Bogenschnitte mn, pq wie in (91).

2) Man ziehe mn und pq, so ist r der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Beweis. Man ziehe zwischen den Punkten die Linien ab, bc, so stellen diese Sehnen von den Bögen des beschriebnen Kreises vor. Nach der Auflösung hat man diese senkrecht halbirt; also geht jede Halbirungslinie mn, pq durch den Mittelpunkt dieses Kreises (135), und da die Linien nur den einzigen Punkt gemein haben, so muß dies der Mittelpunkt seyn.

§. 138.

Zus. Daß die Perpendikel zusammenstoßen müssen, sieht man, wenn man von einem Halbirungs-

punkte zum andern die Linie de zieht; diese de muß von ab und bc verschieden seyn, weil a, b, c nicht in einer geraden Linie liegen sollen (13). Da nun bdr und ber rechte Winkel machen (137), so sind rde + red < 180°, folglich muß dr mit er zusammenstoßen (98). Wären hingegen a, b, c in gerader Linie, so würden mn und pq parallel gehen (93), folglich nie zusammenstoßen, und kein Kreis beschrieben werden können. Dies stimmt auch mit (134) überein.

§. 139.

Zus. Da die Auflösung in (137) nicht mehr als einen Mittelpunkt und Halbmesser giebt, so kann durch 3 gegebne Punkte nur ein einziger Kreis beschrieben werden; wenn also 2 Kreise 3 Punkte mit einander gemein haben sollten, so müßten sie auch alle übrigen gemein haben, d. i. zwey Kreise können einander in nicht mehr als 2 Punkten schneiden.

§. 140.

Lehrs. I. Wenn ein paar Sehnen ab, ed Fig. 62. gleiche Entfernungen vom Mittelpunkt cg, cf, haben, so sind sie gleich; und wenn sie gleich sind, so haben sie gleiche Entfernungen.

II. Wenn eine ab Fig. 63. eine größere Entfernung cg hat, so ist sie kleiner; und wenn

si

sie kleiner ist, so hat sie eine größere Entfernung als die andere.

Beweis. Für I. Man gedenke sich in den rechtwinklichen Dreyecken (81) acg und cek, Quadrate über den 3 Seiten, so ist Qu. ac — Qu. cg = Qu. ag; und Qu. ec — Qu. ck = Qu. ek. Da nun ac = ec (24) und cg = ck n. d. Vorauss. so werden auch ihre Quadrate, und folglich auch jene Reste gleich seyn (49. Ar.); mithin ag = ek, und da diese die Hälften der Sehnen sind (135), auch ab = ed seyn. Eben so folgt auch, wenn man das was itzt die Reste vorstellt, als die abzuziehenden Quadrate ansieht, daß alsdann jene abzuziehenden Quadrate die Reste werden, und folglich cg = ck ist.

Für II. Wenn cg > ck, so wird dort mehr vom Quadr. des Halbmessers abgezogen als hier, folglich bleibt weniger übrig, und ag < ek; folglich auch ab < ed. Wenn hinwiederum ag < ek, so wird dort weniger abgezogen als hier, folglich dort der Rest größer, also cg > ck.

§. 141.

Lehrs. I. Wenn man durch das Ende eines Halbmessers d Fig. 64. eine Linie ab senkrecht zieht, so hat sie weiter keinen, als den Berührungspunkt d, mit dem Kreise gemein.

II. Eine Linie ef, welche nicht senkrecht durch das Ende des Halbmessers geht, schneidet den Kreis in 2 Punkten d und f.

Beweis. Für I. Man ziehe aus dem Mittelpunkte noch einen beliebigen Punkt m in der Linie cm, so ist cm > cd (82) folglich m weiter als um den Halbmesser von c entfernt, folglich ausserhalb des Kreises.

Für II. Auf der Seite wo ef einen spitzigen Winkel mit cd macht, wird man aus c ein Perpendikel auf sie fallen lassen können (68), dies sey cg; es wird kleiner als cd seyn (82), folglich ist der Punkt g nicht so weit als um die Größe des Halbmessers vom Mittelpunkt entfernt, also innerhalb des Kreises. Eben dies gilt von allen Punkten die zwischen g und d liegen. Nun nehme man auf der andern Seite gf = gd. Da der Winkel cgf = cgd (20) und cg = cg, so wird das △ cgf mit △ cgd congruiren, folglich cf = cd seyn, und der Punkt f in der eh, der mit dem Ende des Halbmessers zusammentrift, im Umkreis liegen. Also wird der Kreis einmal in d, und das anderemal in f geschnitten.

§. 142.

Aufg. An einen gegebnen Punkt im Umkreise eine Tangente zu ziehen.

Aufl.

Aufl. Man ziehe an den gegebnen Punkt einen Halbmesser cd, (den man nach Gefallen verlängern kann) und richte in d ein Perpendikel auf (67); dies ist die Tangente.

Beweis. Er fließt unmittelbar aus (141).

§. 143.

Aufg. Von einem gegebenen Punkt d Fig. 65. ausserhalb des Kreises eine Tangente an den Umkreis zu ziehen.

Aufl. 1) Man ziehe von d bis in den Mittelpunkt des Kreises eine gerade Linie dc.

2) Durch e wo sie den Umkreis schneidet ziehe man eine Tangente (142).

3) Man fasse cd und schneide aus c, von der Tangente das Stück cb ab und ziehe cb.

4) Von g, wo cb den Umkreis schneidet, ziehe man eine Linie nach d, diese ist die Tangente.

Beweis. In den Dreyecken dcg und bce ist der Winkel ecg beyden gemein; dc = cb nach (3 der Auflös.) und ec = cg (24) folglich congruiren die Dreyecke und der Winkel cgd = ceb = 90° (141 und 143. no. 2.)

§. 144.

Zus. Ein Perpendikel auf die Tangente durch den Berührungspunkt, geht verlängert durch den Mittelpunkt des Kreises (134. 135. III.).

§. 145.

Lehrs. Concentrische Kreise, d. i. solche denen einerley Mittelpunkt c Fig. 66. zugehört, haben entweder alle Punkte ihrer Umkreise, oder keinen mit einander gemein.

Beweis. Wenn bey beyden die Halbmesser gleich sind, so haben in jedem alle Punkte des Umkreises gleiche Entfernungen vom Mittelpunkt (24). Ist aber der Halbmesser des einen ca, kleiner als der des andern cb, so hat kein Punkt im Umkreis des erstern die Entfernungen welche die des letztern haben, folglich haben sie keinen gemein.

§. 146.

Lehrs. Kreise Fig. 67, 68. deren Peripherien weder ganz zusammen fallen, noch ganz ausser einander liegen, haben nicht einerley Mittelpunkt.

Beweis. Der eine Kreis sey der, welchem der Bogen am, und der andere der, welchem der Bogen an zugehört. Der Mittelpunkt von am sey c, der Halbmesser ac = cm (24). Sollte nun der Mittelpunkt des andern Kreises auch in c liegen, so müßte cn = ca = cm seyn, welches gegen (5. Ax.) streitet.

§. 147.

Lehrs. Ein Kreis der einen andern in einem Punkte schneidet, thut dieses auch noch einmal in einem andern.

Beweis. Es sey Fig. 67. der eine Schnitt in a, so kann man aus a nach beyden Mittelpunkten, die ausser einander liegen müssen (146), Halbmesser ac, aγ ziehen, welche mit der Entfernungslinie der Mittelpunkte cγ, ein Dreyeck machen. An die cγ kann man auf der andern Seite noch ein solches Dreyeck cγb legen (90) in dessen Spitze b also die Kreise zum zweytenmal einander schneiden werden.

§. 148.

Zus. Die gerade Linie ab zwischen den Durchschnittspunkten ist die gemeinschaftliche Sehne der beyden Bögen, die aus den verschiedenen Mittelpunkten sind beschrieben worden.

§. 149.

Zus. Wenn c weiter herunter rückt nach γ, so gehen a und b immer näher zusammen, und die Winkel bey γ werden immer kleiner. Endlich wenn die aγ und γb zusammen in cγ fallen, so verwandeln sich auch die beyden Durchschnittspunkte in einen einzigen Berührungspunkt der nun mit den beyden Mittelpunkten in einer geraden Linie liegt wie in (146).

§. 150.

Aufg. Durch einen Punkt a Fig. 68, 69 zwey Kreise zu beschreiben, die sich blos in diesem Punkte berühren.

Aufl. Man ziehe durch a eine Linie, und nehme in derselben die beyden Mittelpunkte in beliebiger Entfernung von einander an, so ergeben sich die erforderlichen Halbmesser mit welchen man die Kreise beschreiben kann.

Beweis. Er fließt unmittelbar aus (149).

§. 151.

Zus. Kreise die einander blos in einem Punkte berühren, haben daselbst eine gemeinschaftliche Tangente de indem es nur ein Perpendikel durch a auf sie giebt, und in diesem liegen die beyden Mittelpunkte (144). Kreise hingegen die sich schneiden wie Fig. 67, haben am Ende jedes Halbmessers in a und b besondere Perpendikel, folglich auch verschiedene Tangenten.

§. 152.

Lehrs. Wenn zwey Bogen amb, anb Fig. 67. eine gemeinschaftliche Sehne ab haben, so ist der welcher mit einem größern Halbmesser beschrieben worden, der Sehne auf der Seite wo die Mittelpunkte nicht liegen, näher als der, welcher mit einem kleinern beschrieben worden.

Beweis.

Beweis. Man ziehe durch die Mitte der Sehne das Perpendikel mp (64. 66) dieses geht durch die Mittelpunkte c, γ (135 III.). Der kleinere Halbmesser sey ca = cm; der größere aγ = nγ. Nun ist ca + cγ = cm + cγ (49. Ar.) = mγ. Aber ca + cγ > aγ (86) folglich mγ > nγ (3. Ar.) folglich anb näher bey ab als amb.

§. 153.

Zus. Wenn γ in der unbegrenzten mp immer weiter herunter rückt, so kann man beständig mit Halbmessern, die vom folgenden γ bis a oder b genommen werden, neue Bögen beschreiben, und in diesen wird n immer näher bey d liegen, also bey einem unendlich großen Halbmesser unendlich nahe; so daß man die Sehne ab und überhaupt jede begrenzte Linie als einen Bogen von einem unendlichen Halbmesser ansehen kann.

§. 154.

Lehrs. Von Kreisen die sich blos in einem Punkte a berühren, und wo beyde Mittelpunkte auf einerley Seite des Berührungspunktes liegen, Fig. 68. befinden sich alle übrigen Punkte des Umkreises, der den größern Halbmesser hat, ausserhalb desjenigen, der den kleinern hat.

Beweis.

Beweis. Der große Halbmesser ist $a\gamma = \gamma n$, folglich $\gamma n > cm$, also ist n ausserhalb des kleinern Kreises. Wäre nun ein Punkt vom größern Umkreise innerhalb des kleinern, so müßten die Kreise einander geschnitten haben, welches gegen di: Voraussetzung ist.

§. 155.

Zus. Der mit einem größern Halbmesser beschriebene Umkreis nähert sich also der geraden de mehr, als der mit einem kleinern beschriebene, welcher Umstand mit dem in (153) Aehnlichkeit hat.

§. 156.

Anm. Der Winkel welchen die Tangente mit dem Bogen macht, heißt der Berührungswinkel. Da in Fig. 64. jede Linie eh die nicht in der Tangente liegt, den Kreis schneidet und alsdann der Bogen dnf zwischen ihr und der Tangente durchgeht, so kann man sagen, der Berührungswinkel sey kleiner als jeder geradlinigte; da indessen Fig. 68. der Bogen an wieder zwischen der Tangente und dem Bogen am durchgeht, so muß der Winkel den an mit der Tangente macht, noch kleiner seyn als einer der kleiner als jeder geradlinigte ist, und so nach kann der, welchen die Tangente mit am macht, noch nicht völlig Nichts seyn, obgleich wieder zugegeben werden muß, daß selbst ein geradlinigter bis auf Nichts abnehmen kann. Aus diesen Betrachtungen wird begreiflich, wie große Mathematiker über die Beschaffenheit des Berührungswinkels haben streiten können.

können. Vielleicht kann man sich durch folgende Vorstellung aus der Schwierigkeit heraushelfen. Wenn man sich bey einem Bogen die drey Elemente, lmno Fig. 70. besonders vorstellt, so kann die Tangente ab entweder so an ihn stoßen, **daß sie ein Element mn mit ihm gemein hat**; in diesem Fall müßte man sagen, daß der Berührungswinkel Null sey, weil er nach (15) aus der Neigung der ersten Elemente zu bestimmen ist, welche hier ganz aufeinander liegen. Ein Berührungswinkel welchen dann ein Bogen wie an Fig. 68. mit der Tangente machte, würde wie bni Fig. 70. anzusehen seyn, der seinen Scheitel gar nicht im Berührungselemente selbst, sondern erst neben demselben hätte, folglich nicht für einen Theil des vorigen gehalten zu werden brauchte. Ein Winkel dessen Schenkel wie ef Fig. 64. durchs Berührungselement in den Kreis hinein gieng, könnte angesehen werden, als bpg Fig. 70. und dieser könnte demjenigen gleich seyn, den die Tangente mit dem Elemente des Bogens machte, welches dem Berührungselemente zunächst liegt, im Fall nemlich pg mit dem letztgenannten Elemente gleichlaufend wäre; auch könnte er beym Mangel dieses Parallelismus, größer oder kleiner seyn. Nimmt man aber an, daß **die Tangente kein Element mit dem Bogen gemein hat**, sondern durch den Scheitel des Winkels geht, welchen zwey Bogenelemente miteinander machen, Fig. 71. so hat die Sache mehr Schwierigkeit; man könnte sich zwar alsdann vorstellen, daß wenigstens ein Element von einer geraden Linie, wie fg, zwischen der Tangente und dem Bogen durchgienge, es widerspricht aber nun (241. II.). So viel sieht man indessen überhaupt ein, daß die ganze Schwierigkeit

keit darauf beruht, daß sowohl die Elemente der Linien selbst, als auch die Neigungen der aneinander grenzenden so unendlich klein sind, daß man sich keine recht deutliche Vorstellung davon zu machen im Stande ist.

§. 157.

Lehrs. Wenn von zweyen Winkeln in einem Kreise c, d, Fig. 72, 73, 74 der eine seinen Scheitel im Mittelpunkt, und der andere den seinigen im Umkreise hat, beyder Schenkel aber auf einerley Bogen ab stehen, so ist der erstere doppelt so groß, als der letztere.

Beweis. Es können hier dreyerley Fälle statt finden. 1) Der, wo ein Schenkel vom einen und einer vom andern Winkel in eine Linie fallen. Fig. 72. Hier ist $acb = a + d$ (109); aber $a = d$ (53) folglich $acb = 2d$.

2) Wo die Schenkel des Winkels am Mittelpunkte zwischen die des Winkels am Umkreise fallen Fig. 73. Hier ziehe man durch die Scheitel beyder Winkel die Linie de, so hat man $ace = 2m$ und $ecb = 2n$ nach no. 1. Also $ace + ecb = acb = 2m + 2n = 2(m + n) = 2d$.

3) Wo ein Schenkel des einen von einem Schenkel des andern geschnitten wird. Fig. 74. Man ziehe wieder de durch die Scheitel, so ist aus no. 1. $q + p = 2(m + n) = 2m + 2n$ und $q = 2m$, folglich wenn man diesen letzten

ten Ausdruck vom vorigen subtrahirt p = 2m
oder acb = 2adb.

§. 158.

Zus. Wenn also ein Winkel mit seinem Scheitel im Umkreise steht, so hat er zu seinem Maas halb so viel Grade, als der Bogen welcher sich zwischen seinen Schenkeln befindet (28); beträgt nun dieser Bogen 180° so ist der Winkel ein rechter; acb Fig 75. beträgt er über 180° so ist er stumpf wie acd, beträgt er weniger als 180° so ist er spitzig wie ace.

§. 159.

Aufg. An das Ende einer Linie ab, Fig. 79. **ein Perpendikel zu setzen.**

Aufl. 1) Man nehme über der Linie einen Punkt c.

2) Man setze den Zirkel in c, und thue ihn auf bis an das Ende a, wo das Perpendikel hinkommen soll, und bestimme in ab den Punkt d, über a aber reiße maneinen Bogen e.

3) Man ziehe durch d und c eine gerade Linie welche den Bogen e schneidet.

4) Durch diesen Schnitt bis a ziehe man eine Linie, diese wird das Perpendikel seyn.

Beweis. Weil ce = ca = cd so kann man von d bis e einen Halbkreis beschreiben, in welchem

chem der Scheitel des Winkels a liegt, dieser ist = 90° (158) folglich ea ein Perpendikel auf ab (20).

§. 160.

Zus. Wenn mehrere Winkel ihre Scheitel im Umkreise, und einerley Bogen zwischen ihren Schenkeln haben, so sind sie gleich, wie Fig. 76. c, d, e.

§. 161.

Zus. Wenn ein Viereck in einem Kreise beschrieben ist, so machen jede 2 einander gegenüberstehende Winkel zusammen 180°.

§. 162.

Lehrs. Wenn in einem Kreise 2 Sehnen ab, ed, Fig. 77. gleich sind, so sind auch die ihnen gegenüberstehenden Winkel am Mittelpunkt gleich, und so geben hinwiederum gleiche Winkel am Mittelpunkt, gleiche Sehnen.

Beweis. Man ziehe Halbmesser an die Endpunkte der Sehnen, so bekommt man 2 congruirende Dreyecke (58), folglich acb = dce.

Hinwiederum wenn die Winkel am Mittelpunkte gleich sind, erhält man ebenfalls congruirende Dreyecke (51) folglich ab = de.

§. 163

§. 163.

Zus. Wenn also gleiche Sehnen gleiche Winkel am Mittelpunkte haben, so haben sie auch gleiche Bogen über sich (28), und gleiche Bogen haben hinwiederum gleiche Sehnen.

§. 164.

Zus. Ungleiche Sehnen haben nicht gleiche Winkel am Mittelpunkte folglich auch nicht gleiche Bogen. Denn man setze ab sey ed nicht gleich, so wird ihr anderer Endpunkt nicht in d sondern etwa in δ fallen, wenn der eine auf e gelegt wird, und von den Winkeln am Mittelpunkt und den Bögen wird nun einer ein Theil des andern werden.

§. 165.

Lehrs. Wenn man den Umfang eines Kreises in mehrere gleiche Theile theilt, so geben die dazu gehörigen Sehnen ein reguläres Vieleck.

Beweis. Sobald die Bogen gleich sind, werden auch die Sehnen gleich (163); auch stehen nun die Schenkel aller Winkel, welche ein paar Sehnen miteinander machen, auf gleichen Bogen; wenn nemlich die Zahl der Theile = n ist, so beträgt jeder Bogen auf welchem die Schenkel stehen, n — 2 solcher Theile. Man hat also ein Vieleck worinnen alle Seiten und Winkel gleich sind (160), folglich ein reguläres (45).

§. 166.

Zus. Ein solches Vieleck kann also durch die Halbmesser in lauter gleiche Dreyecke getheilt werden, und wenn die Zahl der Seiten gerade ist, so wird die eine Hälfte der Dreyecke in dem einen, und die andere in dem andern Halbkreise liegen; ein solches Vieleck wird also durch lauter Durchmesser in zwey Hälften getheilt.

§. 167.

Zus. Der Winkel am Mittelpunkte findet sich, wenn man in 360° mit der Zahl der Seiten $= n$ dividirt; zieht man nun diesen Quotienten von 180° ab, bleibt die Summe zweyer halben Vieleckswinkel, folglich so viel als ein ganzer, übrig. Dies stimmt auch mit (116) überein, wenn man die Rechnung so vorstellt: $180 - \frac{360^\circ}{n}$; Denn dies ist $= \frac{n. 180^\circ - 360^\circ}{n}$ (64. Ar.) $=$ $\frac{n. 180^\circ - 2. 180^\circ}{n} = \frac{(n-2). 180^\circ}{n}$ (132. Ar.)

§. 168.

Anm. Man pflegt für die verschiedenen regulären Polygone die Centri- und Polygonwinkel in besondere Tafeln zu bringen und in der praktischen Geometrie, besonders aber bey Verfertigung der Festungsrisse Gebrauch davon zu machen.

§. 169.

Aufg. Einen in Graden gegebnen Winkel z. B. von 60° an eine Linie ab Fig. 78. zu setzen.

Aufl. Man bedient sich hierzu eines in seine 180° getheilten Halbkreises, welcher insgemein von Meßing verfertigt und Transporteur genannt wird.

Den Mittelpunkt dieses Instruments legt man an das Ende der Linie so, daß zugleich der erste Theilungspunkt desselben in die Linie fällt; hierauf zählt man so viel Grade ab als der Winkel haben soll, und zieht von dem Punkte wo man dies bemerkt hat, eine Linie nach dem Punkt der den Scheitel des Winkels abgeben soll.

§. 170.

Zus. Durch ein ähnliches Verfahren kann man auch einen vorgegebnen Winkel mit dem Transporteur messen.

§. 171.

Anm. Wenn man für einen bestimmten Halbmesser die Sehnen aller Bogen, nach einzelnen Graden, auch wohl Minuten u. s. w. auf ein besonders Instrument trägt, so erhält man einen geradlinigten Transporteur; dessen Gebrauch zwar mehr Genauigkeit giebt, aber auch zugleich etwas umständlicher ist. Wenn der Transporteur die Grade nur bis 90 angiebt, so mißt man, wenn ein stumpfer Winkel vorkommt, seinen spitzigen

Nebenwinkel (31). Sollte man einen erhabenen Winkel messen, so müßte man entweder einen Transporteur von 360° haben, oder mit dem von 180°, den ihm zugehörigen hohlen (36), messen und dieses Maas von 360° abziehen.

§. 172.

Aufg. In einen Kreis dessen Halbmesser gegeben ist, ein reguläres Vieleck von einer gewissen Anzahl Seiten zu beschreiben. Fig. 19

Aufl. 1) Man suche den Centriwinkel (167) und setze denselben an den gegebenen Halbmesser (169).

2) Man beschreibe mit dem Halbmesser einen Kreis, so wird die Sehne des Bogens welcher zwischen den Schenkeln des angelegten Winkels enthalten ist die Seite des Vielecks seyn, die man dann in der Peripherie herumtragen kann (163).

Beweis. Er ergiebt sich von selbst aus (165)

§. 173.

Zus. Wenn ein reguläres Sechseck beschrieben werden soll, so trägt man sogleich den Halbmesser im Kreise herum. Denn der Centriwinkel wird hier 60° folglich auch jeder halbe Polygonwinkel (16 also die Sehne dem Halbmesser gleich (56).

§. 174.

Aufg. Auf eine gegebne Linie ein verlangtes reguläres Vieleck zu beschreiben. Fig. 19.

Au

Aufl. 1) Man suche den halben Polygonwinkel (116, 167).

2) Man setze ihn an jedes Ende der gegebnen Linie und verlängere die Schenkel bis sie sich schneiden, so ist der Punkt g wo dieses geschieht der Mittelpunkt des Kreises, den man also beschreiben und die Linie als Seite darinn herumtragen kann.

Beweis. Weil die Summe zweyer halben Polygonwinkel gefunden wird, wenn vorher Etwas von 180° abgezogen worden (167), so müssen die Schenkel in no. 2. allemal einander schneiden (98); das übrige folgt aus (165, 167).

§. 175.

Zus. Wenn man ein reguläres Sechseck verlangt, so braucht man auf die Linie blos ein gleichseitiges Dreyeck zu beschreiben; dessen Spitze wird den Mittelpunkt des Kreises geben, worinn er sich beschreiben läßt (173).

§. 176.

Zus. Um aus einem regulären Vieleck ein anderes zu machen, das halb- oder doppelt so viel Seiten hat, darf man nur den Bogen verdoppeln, oder halbiren (163, 135).

§. 177.

Aufg. Ein reguläres Vieleck in ein Dreyeck zu verwandeln.

Aufl. 1) Man setze in eine gerade Linie alle Seiten des Vielecks aneinander.

2) An dem einen Ende dieser Linie errichte man ein Perpendikel (159).

3) Dieses mache man so groß, als die Höhe eines der Dreyecke beträgt, aus welchem das Vieleck besteht.

4) Vom Ende dieses Perpendikels ziehe man eine Linie bis an das andere Ende der in no. 1. erwehnten, so wird man das verlangte Dreyeck erhalten.

Beweis. Alle Dreyecke Fig. 80. haben gleiche Höhe, jede = ck (140) und auch alle gleiche Grundlinien (45); da nun die in Fig. 81. eben dieselben gleichen Grundlinien und die gemeinschaftliche Höhe ck haben, so müssen beyde einander gleich seyn (121). Die letztern aber machen zusammen das △ cke aus, welches also dem Vieleck abcde gleich ist.

§. 178.

Aufg. Aus der gegebnen Sehne eines Bogens ab Fig. 82. die Sehne des halben Bogens ae zu finden.

Aufl. 1) Man ziehe das Quadrat der halben Sehne, ad, vom Quadrat des Halbmessers ac ab; aus dem Rest ziehe man die Quadratwurzel so hat man cd (127).

2) Man

2) Man ziehe cd vom Halbmesser ab, so erhält man de.

3) Das Quadr. von ad addire man zum Qu. von de und ziehe aus der Summe wieder die Quadratwurzel, so erhält man die verlangte ae.

Beweis. Er folgt leicht aus (127).

§. 179.

Zus. Weil ae > ad (79, 110) so kommt die Sehne des halben Bogens ihrem Bogen näher, als die des Ganzen dem ihrigen; auch sind die beyden Abschnitte welche die halben Bögen mit ihren Sehnen machen, kleiner als die Hälfte des Abschnitts welchen der ganze Bogen mit seiner Sehne macht; denn sonst müßten sie den beyden Dreyecken ame + enb gleich seyn, von welchen sie aber nur Theile sind. Es kommen also durch fortgesetzte Halbirungen der Seiten eines regulären in einen Kreis beschriebenen Vielecks, nicht allein die neuen Seiten ihren Bögen, sondern auch die neuen Vielecksflächen, der Kreisfläche im zunehmenden Verhältniß näher, und man sagt deshalb die Seite eines regulären Vielecks von unendlichen Seiten verliere sich in ihrem Bogen und die Fläche eines solchen Vielecks sey der Kreisfläche gleich.

§. 180.

Anm. Wenn man mit dem Bogen des regulären Sechsecks wo ad die Hälfte des Halbmessers ist (77, 173) die Halbirungen anfängt und sie sehr weit

fortsetzt, so kommt man endlich auf eine sehr kleine Seite die man für den ebensovielsten Theil des Umkreises annehmen kann, als die Seitenzahl des itzigen Vielecks beträgt. Multiplicirt man also mit dieser Zahl den Werth jener kleinen Seite, so erhält man den Umkreis in Theilen des Halbmessers ziemlich genau und kann also die Verhältniß des Halb= oder Durchmessers zum Umkreise, in Zahlen die von der Wahrheit nicht sehr abweichen, angeben. Archimedes ist, so viel man weiß der erste gewesen, der sich einer solchen Annäherungsmethode bediente, indem er den Umfang eines regulären 96 Ecks so wohl in= als um den Kreis berechnete und daraus fand, daß sich der Durchmesser zum Umkreis verhielt wie 1 zu 3 und noch einem Stückchen desselben, welches kleiner als $\frac{10}{70}$ und größer als $\frac{10}{71}$ war. Diese Verhältnisse sind in ganzen Zahlen 7 : 22 und 71 : 223, von welchen man ihrer Bequemlichkeit wegen, die erste zu brauchen pflegt. Sehr viel lehrreiches über diese ganze Materie findet man in den Kästnerschen Anfangsgr. der Geom. von S. 268 bis 288 und von S. 304 bis 314. Eine andere Verhältniß hat Adrianus Metius, durch 113 : 355 angegeben. Am genauesten ist die, welche Ludolph von Ceulen gefunden hat. Nach ihr ist, wenn man den Durchmesser = 1 setzt, der Umkreis = 3, 141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 50 welcher aber noch etwas zu klein ist, aber schon zu groß wird, wenn man die 0 in eine 1 verwandelt. Von diesen Zahlen braucht man aber gewöhnlich nur 1 : 3, 41 oder 100 : 314 und wenn man genauer rechnen will 1000 : 3141. Mit Hülfe dieser Zahlen und der Regel Detri läßt sich nun auf die bequemste Art, der Umfang jedes Kreises aus dem Halb=

Halbmesser berechnen, indem an seinem Ort gezeigt werden wird, daß alle Kreise einander ähnlich sind. Hierdurch wird es ferner möglich, den Kreis in ein Dreyeck, Rechteck und Quadrat, zu verwandeln. Es hängt also mit einer genauen Angabe solcher Verhältnißzahlen die Quadratur des Kreises zusammen.

§. 181.

Lehrs. Parallelogramme a b c d **und** b e f c Fig. 83. **welche gleiche Höhen** a d **haben, verhalten sich wie ihre Grundlinien** a b **und** a e, **und wenn sie gleiche Grundlinien haben, wie ihre Höhen.**

Beweis. Wenn man hier ähnliche Betrachtungen anstellt wie in (28), so findet man daß in eben dem Maaß wie die Fläche a b c d mit sich selbst parallel auf a e fortrückt, auch die Grundlinie a b solches thut. Der wievielste Theil also a b c d von a e f d ist, der eben so vielste muß auch a b von ae seyn.

Sieht man a d als die gemeinschaftliche Grundlinie an, so stellen a b und a e die verschiedenen Höhen vor, und die Betrachtungen sind wieder dieselbigen.

§. 182.

Zus. Auch Dreyecke die gleiche Höhen haben, verhalten sich wie ihre Grundlinien und so hinwiederum. Es gilt nemlich wieder von ihnen als Hälften was von den Ganzen erwiesen worden (105).

§. 183.

Lehrs. I. Wenn in einem Dreyeck abc Fig. 84. eine Linie de mit der Grundlinie parallel ist, so haben die gleichnamigen abgeschnittenen Stücke einerley Verhältniß zu einander. d. i. ad : dc = be : ec.

II. Wenn de von den Schenkeln solche Stücken abschneidet, daß sie einerley Verhältniß gegen einander haben, so geht sie mit der Grundlinie parallel.

Beweis. Für I. Man ziehe die Linien ae und db, so erhält man die Dreyecke ade und dec die eine gemeinschaftliche Spitze e und Grundlinien haben, von welchen die eine die Verlängerung der andern ist; folglich haben sie eine gemeinschaftliche Höhe (119).

also △ ade : △ dec = ad : dc }
Eben so: △ bde : △ dec = be : ec } (182)
aber △ ade = △ bde (121)
folglich ad : dc = be : ec (204. Ar.)

Für II. Wenn ad : dc = be : ec
und △ ade : △ dec = ad : dc }
ferner △ bde : △ dec = be : ec } (182)
oder ad : dc n. d. Vor.

so ist △ ade : △ dec = △ bde : △ dec.

Da nun △ dec = △ dec, so ist auch △ ade = △ bde folglich de mit ab parallel (120, 121).

§. 184.

Zus. Es ist auch

ad : be = dc : ec (231. II. Ar.)

und ac : bc = dc : ec (231. V. Ar.)

§. 185.

Lehrs. I. Eine Linie ed welche den Winkel e an der Spitze eines Dreyecks aec halbirt, theilt die Grundlinie dieses Dreyecks ac in zwey Theile ad und dc die sich eben so zu einander verhalten, wie die Schenkel des halbirten Winkels ae und ce.

II. Wenn die genannte Verhältniß statt findet, so halbirt de den Winkel.

Beweis. Für I. Man verlängere ce nach b, eb = ea wird und ziehe ab, so ist

cea = eab + eba (109)

oder cea = 2eba (53)

folgl. $\frac{1}{2}$ cea = ced = cba (49. Ar.)

also de mit ab parallel und deshalb

be : ec = ad : dc (183)

oder ae : ec = ad : dc.

Für II. Man nehme wieder eb = ea so ist eb : ec = ad : dc n. d. Voraussetzung, folglich de parallel mit ab; folglich eba = ced (101)

Nun ist cea = eab + eba (109)

oder cea = 2eba (53)

$\frac{1}{2}$ cea = eba = ced.

§. 186.

Lehrs. Wenn in zwey Dreyecken a b c und $\alpha\beta\gamma$ Fig. 85, 86, zwey gleichnamige Winkel einander gleich sind, wo alsdann auch der dritte, in dem einen, dem dritten in dem andern gleich ist (114), so haben die gleichnahmigen Seiten in beyden einerley Verhältniß zu einander.

Beweis. Es versteht sich, daß ein △ grösser als das andere, denn sonst würden sie wegen der gleichen Winkel völlig congruiren. Man lege also das kleinere △ in das grössere so, Fig. 87. daß ein gleichnamiger Winkel, α, auf den andern, a, und auch die gleichnamigen Seiten die diesen Winkel einschliessen, aufeinander zu liegen kommen, so wird weil $\beta = b$ und $\gamma = c$ ist, $\gamma\beta$ mit c b parallel seyn (93).

Also ist $ab : \alpha\beta = ac : \alpha\gamma$ (183). Schiebt man nun eben so β in b und hernach γ in c, so hat man erstlich $ab : cb = \alpha\beta : \gamma\beta$ und dann $ac : bc = \alpha\gamma : \beta\gamma$ (183). Man sieht von selbst, daß sich auch diese Proportionen nach (231. Ar.) auf mancherley Art verändern lassen. Z. B. $ab : ac\ \alpha\beta : \alpha\gamma$ u. s. w.

§. 187.

Zus. Wenn von zwey Dreyecken Fig. 88. eins ein Theil des andern ist, und die Seiten mit einander parallel laufen, so haben sie in beyden einerley

ley Verhältniß zu einander; denn es werden alsdann die gleichnahmigen Winkel einander gleich (101).

§. 188.

Lehrs. Wenn in zwey Dreyecken abc, $\alpha\beta\gamma$ Fig. 85, 86, zwey Seiten in dem einen, eben die Verhältniß zu einander haben, wie zwey in dem andern, woraus nach (233. Nr.) folgt, daß auch die dritte in dem einen, dieselbe Verhältniß zu den übrigen hat, wie die dritte im andern, so sind die Winkel in der Ordnung wie sie den proportionirten Seiten entgegen stehen, einander gleich.

Beweis. Man lege an die Endpunkte einer Seite des einen Dreyecks z. B. $\alpha\beta$; unterwärts ein paar Winkel von welchen jeder so groß ist, als der welcher im andern Dreyeck in den gleichnahmigen Punkten liegt d. i. den Winkel a an α und b an β; so ist $ab : ac = \alpha\beta : \alpha\delta$ (186)
aber auch $ab : ac = \alpha\beta : \alpha\gamma$ n. d. Vora.
folglich $\alpha\beta : \alpha\delta = \alpha\beta : \alpha\gamma$ (204. Nr.)

Also $\alpha\delta = \alpha\gamma$; verfährt man eben so mit ab, bc und $\alpha\beta$, $\beta\delta$ und $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, so erhält man $\beta\delta = \beta\gamma$, da nun $\alpha\beta$ beyden Dreyecken gemein ist, so congruirt $\triangle\ \alpha\beta\gamma$ mit $\triangle\ \alpha\beta\delta$ folglich ist $a = \gamma\alpha\beta$; $b = \alpha\beta\gamma$ und $c = \gamma$.

§. 189.

Lehrs. Wenn in zwey Dreyecken abc und $\alpha\beta\gamma$ Fig. 85, 86, ein Winkel, a, in dem einen,

nen, gleich ist einem Winkel, α, in dem andern und die Seiten welche diesen Winkel einschliessen, in dem einen △ eben die Verhältniß zu einander haben wie die in dem andern, d. i. ab : ac = αβ : αγ, so sind auch die übrigen Winkel in der Ordnung wie sie den proportionirten Seiten entgegen stehen, in beyden Dreyecken einander gleich und auch die übrigen gleichnahmigen Seiten haben einerley Verhältniß zu einander.

Beweis. Man lege wie im Beweis zum vorigen Satze, unter αβ ein △ αβδ, welches eben die Winkel wie abc hat, so ist wieder

ab : ac = αβ : αδ (186)
und ab : ac = αβ : αγ n. d. Voraussſ.

folglich αδ = αγ; da nun nach d. Vor. a = α also γαβ = δαβ, über dieses αβ gemeinschaftlich ist, so congruirt auch wieder △ αβγ mit αβδ, also sind in den Dreyecken abc und αβγ die gleichnahmigen Winkel gleich und deshalb nach (188) die gleichnahmigen Seiten in einerley Verhältniß.

§. 190.

Zus. Nach (48) sind die Dreyecke, wie sie bisher in (183, 186, 188, 189) betrachtet worden, einander ähnlich; also kann man sagen, Dreyecke sind ähnlich, 1) wenn in denjenigen wo eins ein Theil vom andern ist, Seiten ganz auf einander liegen oder mit einan-

einander gleichlaufend sind. 2) Wenn die einzelnen Winkel in beyden einander gleich sind. 3) Wenn die gleichnahmigen Seiten einerley Verhältniß zu einander haben. 4) Wenn ein paar Winkel einander gleich sind und die dieselben einschliessenden Seiten einerley Verhältniß gegen einander haben.

§. 191.

Zus. Es sind also auch Vielecke einander ähnlich, wenn sie sich in lauter ähnliche und ähnlichliegende Dreyecke zerlegen lassen (48), und aus (231. Nr.) läßt sich herleiten, daß sich dann der Umfang des einen Vielecks zum Umfang des andern, wie eine Dreyecksseite des einen, zu der ähnlichen des andern, verhält. Zu solchen ähnlichen Vielecken lassen sich auch die Kreise rechnen, indem man sich in ihnen ähnliche Dreyecke gedenken kann, deren Seiten die Halbmesser und deren Grundlinien die Elemente des Umkreises sind (179); folglich müssen sich bey ihnen die Umkreise wie die Halbmesser oder nach (49. Nr.) auch wie die Durchmesser verhalten.

§. 192.

Aufg. Eine gegebne Linie ac Fig. 89. **nach den den Verhältnissen einzutheilen, nach welchen eine andere** ab **eingetheilt ist.**

Aufl. 1) Man lege ac an die ab in einem beliebigen Winkel cab, den man indessen um der

Gefahr zu fehlen, leichter auszuweichen, weder zu spitzig, noch zu stumpf nehmen muß.

2) Man verbinde die Endpunkte seiner Schenkel durch eine gerade Linie cb.

3) Man ziehe mit dieser cb durch die Theilungspunkte m, n, Parallelen, so wird ap : am = pq : mn = qc : nb.

Beweis. Es ist

I. ap : pq = am : mn (183)
also II. ap : am = pq : mn (231. II. Ar.)
III. aq : pq = an : mn (231. V. Ar.)
IV. aq : an = pq : mn (231. II. Ar.)
V. aq : an = qc : nb (183)
also VI. pq : mn = qc : nb nach no. IV u. V
also VII. ap : am = qc : nb nach no. II. u. VI

Bey mehrern Theilen kann man auf ähnliche Art weiter schliessen.

§. 193.

Zus. Sollte eine Linie wie ac in lauter gleiche Theile getheilt werden, so nimmt man auf einer andern, wie ab, nach Gefallen so viel gleiche Theile als verlangt werden und verfährt dann wieder wie vorher; so schneidet sich schon mit der ersten Parallele der gesuchte Theil auf ac ab, den man dann weiter forttragen kann.

§. 19

§. 194.

Anm. Wenn der Theile viel sind, so wird man beym Forttragen einen etwa begangenen kleinen Fehler, merklich vergrössern. Um dieses so viel möglich zu verhüten, sieht man, ob sich die Zahl welche die Menge der Theile ausdrückt, in Factoren zerfällen läßt, und theilt alsdann die Linie erstlich in so viel Theile als der eine Factor Einheiten hat, und dann jeden Theil wieder besonders in so viel neue, als der andere Factor Einheiten hat; z. B. statt in 15, erstlich in 5, und dann jeden 5ten wieder in 3.

§. 195.

Aufg. Zu drey gegebnen Linien ab, ac und d Fig. 90. die vierte geometrische Proportioallinie zu finden.

Aufl. 1) Man zeichne einen Winkel und trage ı dessen einen Schenkel vom Scheitel aus, die beyen ersten Linien, und in den andern die dritte inie.

2) Man verbinde die Punkte welche durch die rste und dritte Linie abgeschnitten worden sind, urch db, und ziehe damit durch den Endpunkt er zweiten Linie eine Parallele, so schneidet sie die esuchte vierte ae ab.

Beweis. Nach (183) verhält sich wirklich in er Figur ab : ac = ad : ae.

§. 196.

Zus. Wenn man a c und a d einander gleich nimmt, so findet man durch eben dieses Verfahren zu zweyen Linien die dritte geometrische Proportionallinie a e.

§. 197.

Aufg. Zwischen zwey gegebnen Linien a b und b e Fig. 91. die mittlere geometrische Proportionallinie zu finden.

Aufl. 1) Man setze die beyden Linien in gerader Richtung an einander und halbire diese Summe in c.

2) Aus c beschreibe man mit c a über a e einen Halbkreis.

3) Aus b wo die beyden Linien an einander stehen, errichte man bis an einen Punkt des Halbkreises das Perpendikel b d, dieses wird die gesuchte Linie seyn.

Beweis. Man ziehe a d und d e, so ist a d e ein rechter Winkel (158) und bey b sind auch rechte Winkel (20); a ist dem △ a d e und △ a d b gemein, folglich e = a d b (114) also auch a = b d e, folglich in den Dreyecken a b d und b d e nach (186) a b : b d = b d : b e.

§. 198.

Zus. Wenn man aus b beyderseits wieder Perpendikel auf die Hypothenusen a d und d e fallen läßt,

läßt, so entstehen neue Dreyecke, von welchen sich wie vorhin, zeigen läßt, daß sie sowohl unter sich als den Ganzen ähnlich sind und die eine Menge solcher Proportionen geben, dergleichen vorhin eine ist entwickelt worden.

§. 199.

Anm. Die Aufg. in (195) kann man als die Regel Detri, und die in (192) als die Gesellschaftsrechnung in Linien betrachten. Wenn man in (195) a b als die Einheit und a c, a d als ein paar in einander zu multiplicirende Größen betrachtet, so stellt a e das Product derselben in Gestalt einer Linie vor. Wenn man hingegen die Linie a c im Raum so weit hervorführen oder produciren sollte, als die Große einer andern Linie a d, anzeigt, so stellt das Stück Raum über welches a c wegstreicht, eine Fläche und zwar ein Rechteck vor, von welchem a c die Grundlinie und a d die Seite ist Fig. 93. Nach (196) kann man die Verhältnisse vervielfältigen und nach (197) halbiren, eben so wie (215, 216. Ar.). Auch läßt sich nach (197) eine Quadratwurzel in Linien ausziehen, wenn man die Zahl aus welcher sie gezogen werden soll, in Factoren zerfällt und für den einen Factor a b für den andern aber b e (228. Ar.) annimmt, wo nach (230. Ar.) auch a b die Einheit und b e die Zahl woraus die Wurzel gezogen werden soll, selbst vorstellen kann; und auf diese Art lassen sich Irrationalzahlen wie in (181. Ar.) durch Linien darstellen.

§. 200.

Aufg. Einen verjüngten Maasstab zum messen der geraden Linien auf dem Papiere, zu verfertigen.

Aufl. 1) Man beschreibe über einer Linie ab; Fig. 92. ein Rechteck abcd.

2) Man theile sowohl die Grundlinie, als die Seite desselben in 10 gleiche Theile (193) und ziehe durch die Theilungspunkte Parallelen mit den Grenzlinien.

3) Vom Anfangspunkt des ersten Theils a bis an den Endpunkt desselben in der andern Linie e, ziehe man eine schräge ae und fahre so damit fort, bis man an c kommt.

4) Man verlängere ab und trage das Rechteck abcd mehreremale darauf ohne indeß etwas weiter als die Parallelen mit ab, beyzubehalten.

Beweis. Es ist gewöhnlich, daß man die geometrischen Maasstäbe nach Ruthen, Fußen und Zollen abtheilet und zwar so, daß die Ruthe 10 Fuß und der Fuß 10 Zolle hält. Stellt also ab eine solche Ruthe vor, so wird ak ein Fuß seyn. Daß aber fg ein Zoll ist, ergiebt sich aus folgenden Gründen: in den Dreyecken afg und ade ist fg parallel mit de nach no. 2. also fg : de = af : ad (187). Da nun af : ad = 1 : 10, so ist auch fg = $\frac{1}{10}$ de folglich 1 Zoll, und so läßt sich auf ähnliche Art zeigen, daß hi zwey Zoll und s. w. ist, welches mündlich weiter erläutert werden kann.

§. 201.

Anm. Die Parallelen ke sind blos des Beweises wegen nothig, für den praktischen Gebrauch kann man

man sie entbehren. Man kann den Zoll noch weiter in 10 Linien und diese wieder in 10 Skrupel u. s. w. theilen, wenn es auf sehr genaue Messungen ankommt, und dieses läßt sich dadurch bewirken, daß man zwischen die Punkte af; hf ꝛc. aufs neue 9 Parallelen zieht, wenn man Linien, und 99, wenn man Skrupel verlangt. Die Ruthen bezeichnet man übrigens mit 0, die Fuße mit I, die Zolle mit II u. s. w. Der Zusatz verjüngt, kommt einem solchen Maasstab in so fern zu, als er das im Kleinen darstellt, was ein in der praktischen Geometrie gebräuchlicher Maasstab im Großen ist.

§. 202.

Aufg. Eine gerade Linie auf dem Papiere zu messen.

Aufl. Man fasse die Linie mit dem Zirkel und trage sie auf den verjüngten Maasstab so, daß der eine Fuß des Zirkels allemal in den Anfang irgend einer Ruthe, der andere aber in diejenige gesetzt wird, welche in einzelne Fuße, Zolle ꝛc. abgetheilt ist, so läßt sich durch Abzählen finden, wie lang die Linie in solchem Maaße ist.

Ist die zu messende Linie länger als der ganze Maasstab, so schneidet man den Maasstab auf der Linie so viel mal ab, als es geht, und mißt alsdann blos den Rest auf die zuerst gelehrte Art, zu welchem man dann die ganzen abgeschnittenen Ruthen noch addirt.

Der **Beweis** hierzu ergiebt sich von selbst.

§. 203.

Zus. Wenn man die auf und absteigende Reduction (99. Nr.) bey diesen Maaßen vornehmen will, so braucht man im erstern Fall nur Ziffern von der Rechten zur Linken abzuschneiden, ohngefähr wie bey der Rechnung mit Decimalbrüchen; und im letztern, hat man nur nöthig Nullen anzuhängen; oder wenn auch Einheiten von niedrigern Maaßen mit vorhanden sind, so setzt man diese sogleich hinter die höhern z. B. 324 Zolle $= 3^{0}, 2^{I}, 4^{II}$ und so hinwiederun $3^{0} = 30^{I} = 300^{II}$ oder: $3^{0}\ 6^{I} = 36^{I}$ und $3^{0}\ 0^{I}\ 4^{II} = 304^{II}$ ꝛc.

§. 204.

Aufg. **Ein Rechteck** a c b d Fig. 93. **auszumessen.**

Aufl. 1) Man messe sowohl die Grundlinie, als die Seite desselben nach (202) und drücke beyde in einerley Theilen des Maasstabes aus.

2) Man multiplicire die Zahlen des Maaßes durch einander, so zeigt das Product die Größe des Raums im Flächenmaaß an.

Z. B. a c $= 6^{I}$; a d $= 4^{I}$ so hält das Rechteck 4. 6 = 24 Fuß im Flächenmaaß.

Erläuterung und Beweis. Wenn man eine Fläche ausmessen will, so muß man auch eine Fläche zum Maasstab nehmen, denn dieser ist allemal als ein Theil von der auszumessenden Größe anzu-

anzusehen und muß deshalb gleichartig mit ihr seyn (5. Einl.). Zum Flächenmaasstab hat man das Quadrat gewählt, welches auch wegen seiner gleichen Seiten und rechten Winkel vor allen andern Figuren hierzu geschickt ist. Ein Quadrat dessen Seite 1 Ruthe, Fuß, Zoll, Linie ꝛc. wird eine Quadratruthe, ein Quadratfuß u. s. w. genannt und so bezeichnet: □°, □ᴵ ꝛc.

Wenn man nun das obige Rechteck ausmessen soll, so muß man finden, wie viel □° oder □ᴵ ꝛc. darinn Raum haben und dies geschieht am leichtesten auf folgende Art: Man sieht zuerst wie viel z. B. Fuß nach Längenmaaß in a c Raum haben; findet man nun deren, wie im angenommenen Beyspiel 6, so fällt in die Augen, daß man auch den Quadratfuß a g f e, 6 mal auf a c neben einander legen könne, wo er alsdann das Stück a g h c bedeckt, welches von der Höhe des Rechtecks nur 1 Fuß wegnimmt. Hat man nun a d ebenfalls in Längenmaaß gemessen und es 4 Fuß groß gefunden, so fällt wieder in die Augen, daß man den Streifen von 6 □ᴵ die in a g h c lagen, noch dreymal, also in allem 4 mal, über sich selbst legen kann; folglich enthält das ganze Rechteck 4. 6 = 24 Quadr. Fuß. Wenn im allgemeinen die eine Seite des Rechtecks a und die andere b heißt, so drückt man die Fläche durch a b aus.

§. 205.

Anm. Durch die bloße Multiplikation der beyden Längenmaaße 4 und 6, entsteht also noch kein Flächenmaaß, sondern dadurch, daß man gleichsam stillschweigend das Maaß der Grundlinie 6, in 1 □ ^{I} den man als Maaßstab gleich anfangs in Gedanken hat, multiplicirt; hierdurch wird die 6 zu 6 □ ^{I} (100. Ar. no. 1.) diese 6 □ ^{I} werden dann weiter mit 4 als einer unbenannten Zahl multiplicirt, und so giebt das Product 24 □ ^{I}.

§. 206.

Zus. Wenn sich a c nicht genau durch Fuße ausmessen läßt, so sieht man wie viel ausser den Fußen noch Zolle darinn enthalten sind, und drückt der Gleichförmigkeit wegen nun auch die ganzen Fuße in Zollen aus, und eben so hält man es, wenn ausser den Zollen noch Linien vorkämen, wo man alles in Linien ausdrückt u. s. w. In solchen Fällen ist dann auch der Flächenmaasstab nun 1 □ ^{I} oder 1 □ ^{III}. Eine solche Verwandlung muß man auch vornehmen, wenn zwar a c in Fußen rc. aber a d nicht darinn allein ausgedrückt werden kann. Indessen ist solches nicht zum Messen überhaupt nothwendig, sondern man könnte auch a c allein in Fußen und a d in Zollen ausdrücken und die Zahlen ineinandermultipliciren, nur bleibt alsdann der Flächenmaasstab kein Quadrat mehr, sondern er wird ein Rechteck dessen eine Seite 1^{I} und die andere 1^{II} ist, wie sich mündlich weiter erläutern läßt.

§. 207.

Zus. Es kann vorkommen daß man nie ein Maas findet, mit welchem sich beyde Linien genau ausmessen lassen. So wird z. B. die Hypothenuse eines rechtwinklichen Dreyecks dessen Katheten gleich sind, als die Quadratwurzel von 2 anzusehen seyn (131); da nun diese irrational ist (195. Nr.), so hat sie mit dem Katheten des Dreyecks kein gemeinschaftliches Maas. In solchen Fällen begnügt man sich nun die Linien so genau mit einerley Maas auszumessen, daß der Fehler nicht mehr in Betracht kommt.

§. 208.

Zus. Wenn man statt eines Rechtecks ein Quadrat auszumessen hat, so multiplicirt man gleich die Seite desselben in sich selbst, d. i. wenn diese Seite im allgemeinen a heißt, so ist ihr Quadrat $= a^2$. Gesetzt nun die Seite dieses Quadrats hielt 10^I, so wird sein Flächeninhalt 100 Quadratfuß enthalten, und so wird 1 Quadrat dessen Seite 1^{II} ist, wieder 100 Quadr. Zoll u. s. w. enthalten.

§. 209.

Zus. Wenn man also beym Quadratmaaß die aufsteigende Reduction vornehmen will, so muß man allemal durch 100 dividiren, oder von der Rechten nach der Linken 2 Ziffern abschneiden z. B. $300\square^{II} = 3\square^{I}$; oder $24835\square^{II} = 2\square^{0}\, 48\square^{I}\, 35\square^{II}$. Hinwiederum muß man bey der absteigenden Reduction immer mit 100 multipliciren, oder je 2

und

und 2 Nullen zur Rechten anhängen, statt deren man aber auch sogleich die niedern Einheiten anhängen kann, wenn dergleichen vorhanden sind, nur aber, daß man die Stellen nach dem dekadischen Gesetz (11. Ar.) gehörig in Acht nimmt. Z. B. $5\square^{0}\ 3\square^{I}\ 27^{II} = 50327\square^{II}$.

§. 210.

Zus. Wenn man die Verhältniß zweyer Rechtecke durch ein paar Linien ausdrücken will, so darf man nur zur Einheit und den beyden Seiten eines jeden nach (195) die vierte geom. Proportionallinie suchen, so sind diese die Verhältnißlinien. Bey Quadraten sucht man zur Einheit und der Seite des Quadrats die 3te Proportionallinie (196). Man sieht hieraus zugleich, daß die Verhältniß zweyer Rechtecke aus den Verhältnissen ihrer Seiten zusammengesetzt ist, wie (217. Ar.) vorläufig bemerkt worden ist.

§. 211.

Zus. Da sich alle Vielecke in Dreyecke und diese wieder in ein Rechteck verwandeln lassen (125): so erstreckt sich die Ausmessung des Rechtecks (204) auf die Ausmessung aller dieser Figuren. Da nun ferner nach (197) aus den beyden Seiten eines Rechtecks die mittlere geom. Proportionallinie gefunden werden kann, deren Quadrat dem Product jener beyden Seiten gleich ist (218. Ar.), so sieht man wie jedes Rechteck, und folglich jede aus

Dreyecken bestehende Figur in ein Quadrat verwandelt und als ein solches ausgemessen werden kann. Man pflegt deshalb zu sagen eine Figur sey quadrirt, wenn man sie unter solche Umstände bringen kann, daß sie sich durch Quadratmaaß ausmessen läßt.

§. 212.

Aufg. Ein schiefwinkliches Parallelogramm abcd Fig. 94. **auszurechnen.**

Aufl. 1) Man messe die Grundlinie ab.

2) Man lasse auf dieselbe aus einem Punkt der ihr gegenüber stehenden Seite d, ein Perpendikel de herab und messe solches gleichfalls.

3) Man multiplicire die Maaße in einander, so findet sich der gesuchte Inhalt.

Beweis. Man findet nach dieser Vorschrift eigentlich den Inhalt eines Rechtecks (204), welches mit dem vorliegenden Parallelogramm gleiche Grundlinie und Höhe hat; da nun solche Figuren gleich sind (119), so kann man den einen Inhalt für den andern annehmen.

§. 213.

Zus. ad > de (80), wenn also ad senkrecht auf ab stünde, so könnte man ab mit ad, statt ed, multipliciren und dies würde ein grösseres Product geben. Ein paar Parallelogrammsseiten schliessen also den größten Raum ein, wenn sie senkrecht auf einander stehen.

§. 214.

§. 214.

Aufg. Den Inhalt eines jeden Dreyecks abc Fig. 95, 96 zu finden.

Aufl. 1) Man lasse auf die Linie ab, die man nach Gefallen als Grundlinie angenommen hat, oder auf ihre Verlängerung, von der gegen über stehenden Spitze c ein Perpendikel cd fallen.

2) Man messe sowohl die Grundlinie als dieses Perpendikel.

3) Man multiplicire beyde Maaße durcheinander und halbire das Product.

Beweis. Durch Multiplication der Grundlinie und Höhe, findet man den Inhalt eines Parallelogramms abec, welches doppelt so groß als das Dreyeck ist (21); halbirt man nun dieses, so erhält man den Inhalt des Dreyecks. Z. B. wenn ab = 24^{I} und cd = 16^{I}, so ist △ abc = 384□' = 3^{0} 84^{I}.

§. 215.

Zus. Weil $\frac{ab \cdot cd}{2} = \frac{1}{2}$ ab. cd (83. Ar.) = $\frac{1}{2}$ cd. ab (37. Ar.) so kann man auch sogleich die halbe Grundlinie mit der ganzen Höhe; oder die halbe Höhe mit der ganzen Grundlinie multipliciren.

§. 216.

Aufg. Ein Trapezium abcd Fig. 97, auszurechnen.

Aufl.

Aufl. Man theile es durch die Diagonale db in zwey Dreyecke adb und dbc; rechne diese einzeln aus und addire ihren Inhalt.

Beweis. Er folgt aus dem vorigen §.

§. 217.

Zus. Man kann die Dreyecke so nehmen, daß die Diagonale ihre gemeinschaftliche Grundlinie wird; alsdann hat man für den Inhalt: $\frac{1}{2}$ an . db + $\frac{1}{2}$ cm . db = $\frac{1}{2}$ (an + cm). db = $\frac{1}{2}$ db. (an + cm) (132. Nr.).

§. 218.

Zus. Wenn eine Seite dc mit der andern ab parallel ist, so kann man ab und dc für die Grundlinien der Dreyecke annehmen und zwischen den Parallelen ein Perpendikel pq ziehen, welches die gemeinschaftliche Höhe von beyden Dreyecken vorstellen wird (119) und man hat alsdann für den Inhalt $\frac{1}{2}$ (ab + cd). pq.

§. 219.

Aufg. Ein jedes Vieleck abcd auszurechnen.

Aufl. Man theile es durch Diagonalen in Trapeze und Dreyecke, so lassen sich diese einzeln ausrechnen und summiren.

Der Beweis ergiebt sich von selbst.

§. 220.

Zus. Man könnte es auch nach (124) in ein einziges Dreyeck verwandeln und dann ausrechnen, allein

allein dies würde beschwerlicher und vielleicht auch unsicherer seyn. Wenn man bey einem Vieleck von mehrern Seiten nicht gern viel einzelne Höhen der Dreyecke ziehen will, so ziehe man von einem Winkel in den gegen überstehenden eine gerade Linie wie d b Fig. 99, darauf setze man ein Perpendikel e m aus der ersten Ecke e; mit diesem ziehe man hernach Parallelen durch alle folgende Ecken, d und b ausgenommen, so bekommt man an den Grenzen ein paar Dreyecke e d f und a b h, und in der Mitte Trapeze mit parallelen Seiten, die man nach (218) ausrechnen und summiren kann.

§. 221.

Zus. Wenn unter den Seiten einer Figur krumme Linien, wie b h c Fig. 99. vorkommen, so sehe man sie an als ob sie aus mehrern geraden bestünden, welche hohle oder erhabne Winkel mit einander machen. Je mehr man dergleichen annimmt, desto mehr nähert man sich der Wahrheit.

§. 222.

Aufg. Ein reguläres Vieleck a b c d e Fig. 80. auszurechnen.

Aufl. Da man es nach (177) als ein Dreyeck ansehen kann, dessen Grundlinie der Summe aller Vielecksseiten und dessen Höhe einem Perpendikel gleich ist, das man aus dem Mittelpunkt des Kreises in welchen sich das Vieleck beschreiben läßt, (172) auf eine Vielecksseite fället, so rechne man

man es als ein solches Dreyeck aus. Wenn also die Seite = a, das Perpendikel = p und die Zahl der Seiten = n so ist der Inhalt = $\frac{1}{2}$ anp.

Der **Beweis** folgt aus (177, 214).

§. 223.

Zus. Wenn der Halbmesser des Kreises worinn sich das Vieleck beschreiben läßt, bekannt ist, so kann man das Perpendikel finden, wenn man das Quadrat der halben Vielecksseite vom Quadrat des Halbmessers subtrahirt und aus dem Rest die Quadratwurzel zieht (77, 127). Wenn man z. B. ein reguläres Sechseck hätte dessen Seite = 12^{I}, so wäre der Halbmesser auch = 12^{I} (173) das Quadrat desselben = 144; das Quadrat der halben Seite = 36; der Unterschied zwischen beyden = 108, und $\sqrt{108}$ = 10, 39... also der Inhalt des Vielecks = $\frac{1}{2}$. 12. 6. 10, 39 = $3\square^{0}\ 74^{I}\ 4^{II}$.

§. 224.

Lehrs. Aehnliche Dreyecke abc, $\alpha\beta\gamma$ Fig. 41, 42. verhalten sich wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten.

Beweis. Wenn bd und $\beta\delta$ die Höhen der Dreyecke sind, so ist der Inhalt des erstern $\frac{1}{2}$ ac. bd und der des letztern $\frac{1}{2}$ $\alpha\gamma$. $\beta\delta$ also ist

$\triangle abc : \triangle \alpha\beta\gamma = ac.bd : \alpha\gamma.\beta\delta.$

Weil nun bey d und δ rechte, folglich gleiche Winkel sind, und $a = \alpha$

so ist $ab : \alpha\beta = bd : \beta\delta$ (186)
aber auch $ab : \alpha\beta = ac : \alpha\gamma$ n. d. Voraussſ.
folglich $ac : \alpha\gamma = bd : \beta\delta$ (204. Ar.)

und $\frac{\alpha\gamma.\, bd}{ac} = \beta\delta$ (234. Ar.)

Wenn man nun diesen Werth von $\beta\delta$ in obiger Proportion substituirt, so erhält man

$\triangle abc : \triangle \alpha\beta\gamma = ac.bd : \alpha\gamma.\frac{\alpha\gamma.\, bd}{ac}$

mult. mit ac, $= ac^2.bd : \alpha\gamma^2.bd$ } (49. Ar.)
divid. durch bd, $= ac^2 : \alpha\gamma^2$ }

§. 225.

Zus. Weil $ac : \alpha\gamma = bd : \beta\delta$ (224) so ist auch $ac^2 : \alpha\gamma^2 = bd^2 : \beta\delta^2$ (231. VI. Ar.), also $\triangle abc : \triangle \alpha\beta\gamma = bd^2 : \beta\delta^2$ d. i. Ein paar ähnliche Dreyecke verhalten sich auch wie die Quadrate ihrer Höhen.

§. 226.

Zus. Aehnliche Figuren wie Fig. 100 und 101, verhalten sich ebenfalls wie die Quadrate ähnlich liegender Dreyeckseiten in beyden, denn

I. $\triangle abe : \triangle \alpha\beta\varepsilon = ab_2 : \alpha\beta^2 = eb^2 : \varepsilon\beta^2$ (224)

Ferner II. $\triangle ebd : \triangle \varepsilon\beta\delta = eb^2 : \varepsilon\beta^2$

also

also III. $\triangle abe : \triangle \alpha\beta\varepsilon = \triangle ebd : \triangle \varepsilon\beta\delta$
(204 Nr.

oder IV. $\triangle abe : \triangle ebd = \triangle \alpha\beta\varepsilon : \triangle \varepsilon\beta\delta$
(231. II. Nr.)

Zusammeng. V. $\triangle abe + \triangle ebd : \triangle ebd = \triangle \alpha\beta\varepsilon + \triangle \varepsilon\beta\delta : \triangle \varepsilon\beta\delta$

d. i. VI. $abde : \alpha\beta\delta\varepsilon = \triangle ebd : \triangle \varepsilon\beta\delta$

Es war aber in II. $\triangle ebd : \triangle \varepsilon\beta\delta = eb^2 : \varepsilon\beta^2$
und nach I. $eb^2 : \varepsilon\beta^2 = ab^2 : \alpha\beta^2$
folglich aus VI. $abde : \alpha\beta\delta\varepsilon = ab^2 : \alpha\beta^2 = eb^2 : \varepsilon\beta^2$

Schließt man auf diese Art weiter fort, so erhält man $abcde : \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = ab^2 : \alpha\beta^2 = eb^2 : \varepsilon\beta^2$ oder auch $= an^2 : \alpha\nu^2$.

§. 227.

Zus. Da man die Kreise auch als Vielecke, und ihre Durchmesser oder Halbmesser als Linien, die in ihnen auf ähnliche Art bestimmt sind, ansehen kann, so werden sich auch ein paar Kreise wie die Quadrate ihrer Durchmesser oder die ihrer Halbmesser zu einander verhalten.

§. 228.

Aufg. Aus dem gegebnen Inhalt und der Grundlinie eines Dreyecks, seine Höhe zu finden; oder die Grundlinie, aus dem Inhalt und der Höhe.

Aufl. Man verdoppele den Inhalt und dividire darein mit der Grundlinie, so giebt der Quotient

die Höhe; oder man dividire mit der Höhe, so erhält man die Grundlinie.

Beweis. Wenn die Höhe = a; die Grundlinie = b und der Inhalt = c, so ist $c = \frac{ab}{2}$ (214) folglich $\frac{2c}{b} = a$ und $\frac{2c}{a} = b$ (49. Nr.).

§. 229.

Zus. Zieht man ein paar Parallelen deren Entfernung, der gesuchten oder gegebnen Höhe gleich ist, so lassen sich für einerley Grundlinie unzählige Dreyecke ziehen, die zwar alle gleich groß sind, aber sehr verschiedene Gestalten haben. Die sämmtlichen Stellen welche in der einen Parallele die Spitzen und in der andern die Grundlinien dieser Dreyecke enthalten können, nennt man einen geometrischen Ort, und eine Aufgabe die so vielerley Auflösungen verstattet, eine unbestimmte Aufgabe.

§. 230.

Aufg. **Eine Figur abcde in etliche gleiche Theile zu theilen, z. B. in drey.**

Aufl. 1) Man rechne sie aus (219) und dividire den Inhalt durch die Zahl der Theile.

2) Man sehe jeden solchen Theil als den Inhalt eines Dreyecks an, zu welchem man die Höhe sucht, indem man eine Seite des Vielecks oder eine in demselben gezogne und gemessene Linie als die dazu gehörige Grundlinie annimmt.

3) Mit

3) Mit der angenommenen Grundlinie ziehe man eine Parallele die so weit absteht, als die gefundene Höhe beträgt, so wird sich das Dreyeck beschreiben lassen.

4) Kann oder will man den ganzen Theil nicht in Gestalt eines einzigen Dreyeckes in der Figur abschneiden, so zerlegt man ihn in 2 oder mehrere kleinere Theile und setzt sie in Gestalt von Dreyecken aneinander. Z. B. der Inhalt der ganzen Figur sey $= \overset{\square}{2}\overset{o}{5}\overset{I}{4}2\overset{II}{8}$, so ist der 3te Theil $= 847\overset{II}{6}$. Wäre der Inhalt des △ ecd $= 360\overset{II}{0}$ so bleibt wenn man es von jenem Drittel abzieht $4\overset{I}{8}7\overset{II}{6}$; diesen Rest sehe man als den Inhalt eines Dreyecks an, von welchem ec $= \overset{o}{1}\overset{I}{6}\overset{II}{0}$ die Grundlinie wäre und wozu man die Höhe sucht (228). Diese Höhe ist nun beynahe $\overset{I}{6}\overset{II}{1}$; in dieser Weite eine Parallele mit ec gezogen, schneidet ae in f; man ziehe also cf, so ist das erste Drittel von der Figur abgeschnitten. (Man hätte auch einen Punkt wie f in bc bestimmen, und eine Linie von e bis dahin ziehen können.

Um nun das zweite Drittel in Gestalt einer vierseitigen Figur zu erhalten, zerlege man die Zahl 8476^{II} in 2 Hälften und sehe die eine Hälfte 4238^{II} wieder als den Inhalt eines Dreyecks an, dessen Grundlinie fc $= 164^{II}$ wäre und wozu man wieder die Höhe sucht; sie ist fast 51^{II}; in dieser

Weite ziehe man eine Parallele mit fc, so erhält man den Punkt h, und das △ cfh wird die erste Hälfte des 2ten Drittels seyn. Man sehe fh = 150'', als die Grundlinie des △ an welches die 2te Hälfte des 2ten Drittels giebt, und suche wieder die Höhe; sie wird seyn beynahe 55''; zieht man nun in dieser Weite abermals eine Parallele mit fg. so erhält man g, und ghcf wird das 2te Drittel seyn, und der übrige Raum abhg, ist mithin das 3te Drittel.

§. 231.

Anm. Es fällt von selbst in die Augen, daß man die Theilung auch so hätte einrichten können daß die Theilungslinien von oben nach unten gegangen wären, denn die Methode die Theile durch Dreyecke zusammen zu setzen, ist ganz allgemein.

Sollte die Figur in gewisse proportionirliche Theile getheilt werden, so sucht man sie nach (249. Nr.) aus den gegebnen Verhältnißzahlen und verfährt wie zuvor.

§. 232.

Zus. Wenn die Figur ein Dreyeck ist, abc Fig. 103. so theilt man blos die Grundlinie in gleiche oder proportionirliche Theile und zieht aus der Spitze nach allen Theilungspunkten, Linien (121, 182).

§. 233.

Zus. Bey einem Parallelogramm abcd Fig. 104. theilt man ebenfalls blos die Grundlinie und

zieht

zieht durch die Theilungspunkte Parallelen mit der Seite (119, 181).

§. 234.

Zus. Sollte man aber ein Parallelogramm abcd Fig. 105. aus einem Punkte m in zwey gleiche Theile theilen, so trage man dm aus b nach n und ziehe mn. Es ist nemlich in den Dreyecken adm und bcn, dm = bn nach d. Vorschr. ad = bc und adm = nbc (105), folglich △ adm congruent mit △ nbc, (51) also am = nc; ferner an = am (105. und 49. Ax.) mn = mn also △ amn ≐ △ mna folglich admn = mnbc (49. Ax.).

§. 235.

Aufg. Wenn von einem Kreise der Halbmesser, oder Durchmesser, oder Umkreis, oder Inhalt gegeben ist, so soll man mit Beyhülfe der Verhältnißzahlen in (180) z. B. 1 : 3, 14 . . aus einem von jenen gegebnen Stücken die übrigen finden.

Aufl. und Beweis. Man nenne überhaupt den Halbmesser r; den Durchmesser d; den Umkreis p; und den Inhalt a, so ist

I. $r = \frac{1}{2} d$ (26) und II. $d = 2r$.

Ferner ist: $1 : 3,14 \ldots = d : p$ (191)

also: III. $p = 3,14 \ldots d$ (224. Ax.) und aus II. den Werth von d substituirt.

IV. $p = 2\,r.\,3,14\ldots$ Dividirt man in (III) beyderseits mit $3,14\ldots$ so erhält man: $d = \frac{p}{3,14\ldots} = p.\frac{1}{3,14\ldots}$ (83. Nr.). Den Bruch $\frac{1}{3,14\ldots}$ findet man in Hübschens Arithm. Portensi Th. III. §. 116, in folgenden Decimalbruch verwandelt: 0, 3183098861837906715 3.., wozu Hr. Hofr. Kästner S. 318. der 4ten Ausg. s. Geom. bemerkt, daß die letzte Ziffer beynahe 4 seyn sollte. Man kann also setzen

V. $d = p.\,0,318\ldots$ und die Hälfte genommen.

VI. $r = \frac{1}{2}\,p.\,0,318\ldots = p.\,0,159\ldots$ Nach (177, 179) läßt sich der Kreis als ein Dreyeck ansehen, dessen Grundlinie dem Umkreis, und dessen Höhe dem Halbmesser gleich ist, also kann man setzen: $a = \frac{p\,r}{2} = \frac{p\,d}{4}$ (214). Nimmt man nun statt p, seinen Werth aus IV, so wird aus dem Ausdruck: $\frac{p\,r}{2}$, dieser: $\frac{2.\,3,14\ldots r.\,r}{2}$ folglich

VII. $a = 3,14\ldots r^2$. Nimmt man aber den Werth von p aus (III.) so erhält man statt des Ausdrucks: $\frac{p\,d}{4}$, diesen: $\frac{3,14\ldots d\,d}{4}$ also

VIII. $a = \frac{3,141\ldots d}{4} = 0,785\ldots d^2$. Substituirt man im erstern Ausdruck von VIII. den Werth

Werth von d, der in der Folge von IV steht: p. $\frac{1}{3,14..}$ so erhält man: $a = \frac{3,14..p.p.1.1}{4.3,14...3,14..}$ $= \frac{p^2.1}{4.3,14..} = \frac{p^2.0,3183..}{4}$ also:

IX. $a = p^2.0,0795..$ dividirt man beyderseits mit 0,0795, so erhält man $p^2 = \frac{a}{0,0795..}$ also

X. $p = \sqrt{\left(\frac{a}{0,0795..}\right)}$ dividirt man beym ersten Ausdruck in (VIII.) beyderseits mit $\frac{3,14..}{4}$, so erhält man $d^2 = \frac{4a}{3,14..} = 4a.\frac{1}{3,14..} = 4a.0,318..$, also

XI. $d = \sqrt{(4a.0,318..)}$ und die Hälfte genommen.

XII. $r = \frac{1}{2}\sqrt{(4a.0,318..)}$

Aus diesen Formeln lassen sich nun leicht besondere Regeln für eben so viel einzelne Aufgaben herleiten z. B. aus III. Es ist gegeben der Durchmesser unserer Erdkugel, 1720 Meilen, wie viel wird ihr Umkreis betragen? Man multiplicire 1720 mit 3,14.. so erhält man dafür 5400,8.. Meilen. Dieses Resultat ist aber nicht ganz genau, theils weil der Durchmesser nicht ganz 1720 Meilen beträgt, theils weil man von der Verhältnißzahl in (180) blos 3 Ziffern genommen hat. Je genauer man also das Resultat haben

 will,

will, desto mehr Ziffern muß man nehmen, dies gilt überhaupt von allen den in den obigen Formeln enthaltenen Zahlen hinter welchen sich noch ein paar Punkte befinden.

Aus V. Es ist gegeben der Umfang eines Baums: 10 Fuß, man soll seinen Durchmesser finden. Man multiplicire ihn mit 0, 318.. so erhält man dafür 3, 18.. Fuß, oder $3^{I}\ 1^{II}\ 8^{III}$..

Aus VII. Man soll aus dem gegebenen Halbmesser eines Tellers: 6 Zoll, seine Fläche finden. Man quadire den Halbmesser und multiplicire das Quadrat 36, mit 3, 14.. so erhält man 113, 04 d. i. $1^{\square I}\ 13^{II}\ 4^{III}$

Aus XI. Der Umfang einer Säule enthält 1° wie viel beträgt der Inhalt ihres Querschnitts? man quadrire den Umfang und multiplicire das Quadrat mit 0, 0795.. so erhält man 0, 0795.. Quadratruthen oder $7^{\square I}\ 95^{II}$..

Aus XI. Der Inhalt einer Kreisfläche beträgt $1^{\square\circ}$ wie groß ist ihr Durchmesser? Man multiplicire das vierfache des Inhalts $4^{\square\circ}$ mit 0, 318.. so erhält man 1, 272 und hieraus die Quadratwurzel gezogen, giebt den Durchmesser 1, 12 Ruthen = $1^{\circ}\ 1^{I}\ 2^{II}$.. Hieraus erhellet zur Genüge wie man auch mit den übrigen Formeln zu verfahren hat.

§. 236.

Anm. Nach dem letztern Ausdruck in VIII. ist $a = 0,785 .. d^2$; stellt man sich vor, daß der Ausdruck rechter Hand durch 1 dividirt wäre, so kann man aus dieser Formel, folgende Proportion machen $1 : 0,785 = d^2 : a$ oder $d^2 : a = 1000 : 785 ..$ dies drückt man so aus: das Quadrat des Durchmessers verhält sich zur Kreisfläche wie 1000 zu 785 ..

§. 237.

Aufg. Aus den gegebnen Durchmessern zweyer Kreisflächen den Durchmesser einer dritten zu finden, welche die Summe oder Differenz von jenen beyden ist.

Aufl. Man verfahre mit diesen Durchmessern wie in (130 und 132) mit den Quadratseiten, so werden die erhaltenen Linien, die verlangten Durchmesser seyn.

Beweis. Nach (227) verhalten sich die Kreisflächen wie die Quadrate ihrer Durchmesser; nun erhält man nach der Auflös. Seiten zu Quadraten welche die Summe oder Differenz derjenigen Quadrate sind welche zu den gegebnen Seiten gehören, folglich müssen eben diese Linien auch als Durchmesser angesehen werden können, deren zugehörige Kreise die Summen oder Differenz derjenigen Kreise sind, zu welchen die Linien als Durchmesser gehörten.

§. 238.

§. 238.

Zus. Eben so kann man nach (131) Kreise erhalten die das Doppelte, oder die Hälfte eines andern Kreises sind.

§. 239.

Aufg. Aus dem gegebnen Halbmesser eines Kreises und dem Winkel den ein paar Halbmesser desselben miteinander machen, den Inhalt des zwischen diesen Halbmessern befindlichen Ausschnitts abc Fig. 106. zu finden.

Aufl. 1) Man suche den Umkreis (235. IV.).

2) Man suche die Länge des zwischen den Halbmessern befindlichen Bogens im Maaß des Durchmessers, indem man setzt: wie 360° zu den Graden welche dem gegebnen Winkel zukommen, so der nach no. 1. gefundene Umkreis im Maas des Durchmessers, zu der Länge des gesuchten Bogens in eben dem Maaße.

3) Das Längenmaaß dieses Bogens multiplicire man mit der Hälfte des Halbmessers, so erhält man den verlangten Inhalt. Es sey z. B. der Halbm. $=$ 1°; der Winkel acb $= 60°$ so hat man p $=$ 6, 28 Ruthen; den Bogen ab $= \frac{60.\ 6,28}{360}$ und den Ausschnitt $= \frac{60.\ 6,28.\ 1}{360\ .\ .\ 2} = \frac{1,57}{3} = 0,5233..$ Quadratruthen $= 52\,\square^{I}\ 33^{II}..$

Beweis.

Beweis. Da der Bogen ab, das Maas des Winkels acb ist, so wird er ein eben so großer Theil vom Umkreis seyn, als der Winkel von 360° ist (28). Nun kann man den Ausschnitt als eine Menge von Dreyecken ansehen, deren Schenkel und Höhen lauter Halbmesser sind, und deren sämmtliche Grundlinien zusammen den Bogen betragen (191) folglich kann man damit nach (214) verfahren.

§. 240.

Aufg. Aus einer gegebnen Sehne ab und ihrem Bogen aeb, den Inhalt des Abschnitts zu finden.

Aufl. 1) Man nehme 3 Punkte im Bogen und suche den Mittelpunkt des Kreises welchem er zugehört (137), so läßt sich der Kreis selbst beschreiben.

2) Man ziehe aus dem Mittelpunkte nach den Endpunkten des Bogens Halbmesser, so erhält man einen Ausschnitt von welchem der zu berechnende Abschnitt ein Theil ist.

3) Man messe den Winkel des Ausschnitts nebst dem Halbmesser und suche seinen Inhalt nach (239).

4) Berechne man auch das Dreyeck abc indem man die Höhe desselben cd mißt, oder sie nach (178. no. 1.) berechnet.

5) Den

5) Den Inhalt dieses Dreyecks ziehe man von dem des Ausschnitts ab, so bleibt der des Abschnitts übrig.

Der Beweis ergiebt sich von selbst aus den angezogenen §§.

§. 241.

Zus. Ist der Bogen in Graden gegeben, so hat man den Centriwinkel (28); diesen von 180° abgezogen und den Rest halbirt, giebt den Winkel welchen die Halbmesser mit der Sehne machen, und auf die Art findet man den Mittelpunkt wie in (174); wäre der Bogen 60° und die Sehne 10', so wäre itzt der Halbm. auch 10 (173) mithin die Höhe des Dreyecks cd $= \sqrt{(100 - 25)} = \sqrt{75} = 8,66$.. (178. no. 1.) also $\triangle$ acb $=$ 43' 30'' und der Ausschnitt 52', 33'', folglich der Abschnitt 9', 03''.

§. 242.

Zus. Aus der halben Sehne ad und der Höhe des Bogens über ihr, de, läßt sich auch der Halbmesser durch Rechnung finden. Nach (197) ist nemlich ed : ad $=$ ad : df also der Halbmesser $= \frac{ed + df}{2}$; und cd $=$ df $-$ cf; wie hieraus ferner der Winkel acb durch Rechnung gefunden werden kann, lehrt die Trigonometrie.

§. 243.

Aufg. Aus den gegebnen Halbmessern zweyer concentrischen Kreise den Inhalt des zwischen ihren Umkreisen befindlichen Ringes zu finden.

Aufl. 1) Man erhebe jeden Halbmesser zum Quadrat und ziehe das kleinere vom grössern ab.

2) Man multiplicire den Rest mit 3, 14.. so erhält man das verlangte.

Beweis. Der Ring ist eigentlich der Unterschied zwischen den beyden Kreisflächen. Wenn nun die grössere A und ihr Halbmesser R heißt, so ist $A = 3,14..R^2$ (235. VII.) wenn man ferner die kleinere durch a und ihren Halbmesser mit r bezeichnet; so ist $a = 3,14..r^2$ folglich der Unterschied zwischen beyden $3,14..R^2 - 3,14..r^2 = 3,14..(R^2 - r^2)$ (132. Ar.).

§. 244.

Zus. Sollte man nur ein Stück dieses Ringes finden, welches durch ein paar Halbmesser bestimmt worden, so sage man: wie sich verhält 360° zur Größe des Winkels welchen diese Halbmesser einschliessen, so verhält sich der Inhalt des ganzen Ringes zum Inhalt des gesuchten Stücks (28).

§. 245.

Grundſ. Eine Ebne ist ihrer Lage nach bestimmt, sobald man 3 Punkte a b c Fig. 107. angiebt,

giebt, die nicht sämmtlich in einer geraden Linie liegen.

§. 246.

Erkl. Ein Perpendikel ac auf einer Ebne mn, ist eine Linie welche mit allen durch ihren Endpunkt in der Ebne gezogenen Linien cb, cd ꝛc. rechte Winkel macht.

§. 247.

Erkl. Der Winkel abc welchen eine Linie ab mit einer Ebne mn macht, ist derjenige, welchen diese ab mit einer durch ihren Endpunkt b in der Ebne gezognen bc macht, welche so liegt, daß ein auf der Ebne stehendes Perpendikel ac so wohl durch sie, als durch jene Linie geht.

§. 248.

Anm. Die Figuren welche zu diesen und den zunächst folgenden Sätzen gehören, lassen sich auf dem Papiere nicht so deutlich, wie die bisherigen, darstellen, weil zu ihnen Linien gehören, welche nicht in der Fläche des Papiers liegen, sondern sich über dieselbe erheben. Man kann sich aber die Vorstellungen erleichtern, wenn man die über der Ebne des Papiers befindlichen Linien durch Nadeln u. dergl. vorstellt.

§. 249.

Grundſ. Wenn zwey Ebnen abc und mn einander treffen, so ist die Stelle bc wo dieses geschieht, eine gerade Linie, welche beyden Ebnen gemeinschaftlich ist.

§. 250.

§. 250.

Lehrs. Wenn eine Linie ac auf 2 in einer Ebne mn Fig. 107. gezogenen cb und cd senkrecht steht, so steht sie auch auf jeder andern durch ihren Endpunkt in dieser Ebne gezogenen, ce, senkrecht.

Beweis. Man verlängere die cb und cd in der Ebne mn bis cf = cb; cg = cd und ziehe fd, gb. Die nach Belieben angenommene dritte Linie ce ziehe man so aus, daß sie die fd und gb in e und h schneidet. Man ziehe ferner aus a nach den Punkten b, d, e, f, g, h Linien, so erhält man folgende Dreyecke:

I. △ bcg und △ cdf in welchen
bc = cf } (n. d. Vorauss.)
cd = cg }
bcg = fcd (39) also congruiren beyde nach (51). Folglich gb = fd; cbg = cfd und bgc = cdf.

II. △ cgh und △ cde in diesen ist
cg = cd (n. d. Vorauss.)
bgc = cdf nach (I.)
hcg = ecd nach (39) sie congr. also nach (54) und es ist hg = ed und ch = ce.

III. △ abc und △ acf; hier ist
bc = cf (n. d. V.)
ac = ac (3. Ax.)
acb = acb (33) also congr. sie nach (51) und es ist ab = af.

IV. △ acg und △ acd welche ganz aus denselben Gründen wie die in III. congruiren und ag = ad geben.

V. △ agb und △ adf hier ist
gb = fd (I.)
ab = af (III.)
ag = ad (IV.) sie congruiren also nach (58) und agh = ade.

VI. △ agh und △ ade in diesen ist
ag = ad (IV.)
hg = ed (II.)
agh = ade (V.) sie congr. also nach (51) und ah = ae.

VII. △ ach und △ ace hierin ist
he = ce (II.)
ac = ac (3. Ar.)
ah = ae (VI.) also congr. auch diese nach (58) und ach = ace also ac senkrecht auf ce (20).

§. 251.

Lehrs. Wenn eine Linie ac auf 3 verschiedenen, wie bc, dc und ec senkrecht steht, so sind diese 3 Linien in einer Ebne.

Beweis. Man setze ce wäre nicht in der Ebne bcd, so muß es eine andere in der Ebne aec gezogne geben, welche sich in bcd befindet, diese sey cq so muß acq = 90° seyn, nach (250). Da nun

nun nach der Voraussetzung auch ace = 90° ist, so müßte der eine rechte Winkel grösser seyn als der andere, welches gegen (33) streitet.

§. 252.

Erkl. Der Winkel welchen 2 Ebnen mit einander machen, ist derjenige, welchen 2 in ihnen gezogene Linien mit einander machen, welche beide in einem Punkte auf der Durchschnittslinie der Ebnen senkrecht stehen.

§. 253.

Erkl. Eine Linie oder Ebne läuft mit einer Ebne parallel, wenn sie mit derselben nie zusammenstößt, die Erweiterung derselben mag auf jeder Seite so weit gehen, als sie will.

§. 254.

Grundſ. Wenn 2 parallele Ebnen von einer dritten geschnitten werden, so sind die Linien worinn solches geschieht auch parallel. Indem nemlich jede solche Durchschnittslinie mit zu der Ebne gehört, welche mit der andern parallel ist (249) kann sie auch so wenig, als die Ebne selbst, mit der andern zusammenstoßen.

§. 255.

Lehrſ. Eine Ebne gad Fig. 107. **steht allemal auf einer andern** mn **senkrecht, wenn eine Linie** ac **in ihr, auf dieser andern senkrecht steht.**

 Beweis,

Beweis. In mn ziehe man auf die Durchschnitts-linie gd in c, wo die ac in mn trift, ein Perpendikel cb, dieses wird auf ac senkrecht seyn (246). Da nun diese bc mit ac den Neigungswinkel der beyden Ebnen macht (252), und dieser ein rechter ist, so wird die eine Ebne auf der andern senkrecht seyn.

§. 256.

Lehrs. Wenn 2 Linien ac **und** $\alpha\gamma$ **auf einer Ebne** mn Fig. 108. **senkrecht stehen, so sind sie parallel.**

Beweis. Man ziehe eine Linie von c bis γ so sind die innern Winkel $ac\gamma + \alpha\gamma c$ so groß als 2 rechte; wären nun ac und $\alpha\gamma$ zugleich in einerley Ebne (18) so folgte ihr Parallelismus aus (93). Daß sie nun unter gegenwärtiger Voraussetzung wirklich auch in einerley Ebne sind, wird so bewiesen: I) Man ziehe $a\gamma$, so sind ac, $c\gamma$ und $a\gamma$ in einer Ebne $ac\gamma$ (245). II) Man setze auf $c\gamma$ ein Perpendikel γd, so groß als ac, und ziehe ad, so ist in den Dreyecken $ac\gamma$ und $a\gamma d$

$$ac = \gamma d$$
$$c\gamma = c\gamma,$$
$$ac\gamma = c\gamma d$$

(33) also congruiren die Dreyecke (51) und $a\gamma = cd$. Weiter ist in den $\triangle\,\triangle$ acd und $a\gamma d$

$$a\gamma = cd$$
$$ad = ad$$
$$ac = \gamma d$$

sie congr. also nach (58) und es ist der Winkel $acd = a\gamma d$. Es steht also $d\gamma$

auf

auf $\gamma\alpha$; γa und γc senkrecht und es liegen nun diese 3 Linien in einerley Ebne nemlich in $a c \gamma$ 251). Da nun nach I.) $a c$ auch in dieser Ebne liegt, so wird auch $a c$ mit $\alpha\gamma$ in einerley Ebne liegen.

§. 257.

Lehrs. Wenn von 2 parallelen Linien $a c$; $\alpha\gamma$ eine, $a c$, auf die Ebne $m n$ senkrecht ist, so ist es die andere $\alpha\gamma$ gleichfalls.

Beweis. Man ziehe wieder $c\gamma$, setze $\gamma d = a c$, auf $c\gamma$ senkrecht, und ziehe $a d$, so erhält man wieder die congr Dreyecke $a c \gamma$ und $a \gamma d$ folglich den Winkel $a\gamma d = a c d = 90^\circ$, also ist $d\gamma$ auf die Ebne $a c \gamma$ senkrecht (250). Wegen des Parallelismus wird nun $\alpha\gamma$ ebenfalls in der Ebne $a c \gamma$ (18), folglich $d\gamma$ auch auf $\alpha\gamma$ senkrecht seyn (250). Da nun der Winkel $a c \gamma$ ein rechter ist, so muß auch $\alpha\gamma c$ ein rechter seyn (101), also steht $\alpha\gamma$ sowohl auf γc als γd, folglich auf der Ebne $m n$, senkrecht.

§. 258.

Lehrs. Zwey Linien $a b$ und $c d$ Fig. 109. welche mit einer nicht in derselben Ebne liegenden dritten $e f$ parallel sind, sind auch unter sich parallel.

Beweis. Man setze in der Ebene $a b f e$ und $c d f e$ ein paar Perpendikel auf $e f$ welche beyde durch einen Punkt g, gehen und $a b$ in h; $c d$ in

i treffen, so steht fg auf der Ebne igh senkrecht (250); also auch id und hb (257), folglich sind id und hb parallel (256).

§. 259.

Lehrs. Wenn 2 nicht in einerley Ebne liegende Winkel acb und $\alpha\gamma\beta$ Fig. 110. parallele Schenkel haben, so sind sie gleich.

Beweis. Man mache ac = $\alpha\gamma$ und bc = $\beta\gamma$, so lassen sich die Parallelogrammen ac$\gamma\alpha$ und bc$\gamma\beta$ beschreiben (107) also aα = cγ = bβ (102); ferner aα parallel mit bβ (258) und auch ab parallel mit $\alpha\beta$ (254) weil diese Linien mit den parallel angenommenen Schenkeln in einerley Ebne liegen (245 folglich ab = $\alpha\beta$ (102) und △ acb congruent mit △ $\alpha\gamma\beta$ (58) mithin der Winkel acb = $\alpha\gamma\beta$.

§. 260.

Anm. Die Winkel könnten parallele Schenkel haben aber so liegen, daß der Scheitel des einen zu oberst und der des andern zu unterst gekehrt wäre; in einem solchen Falle müßte man die Schenkel des einen rückwärts verlängern um seinen Vertikalwinkel zu bekommen und dann würde man wieder den in der Figur angenommenen Fall haben.

§. 261.

Aufg. Aus einem Punkt a Fig. 111. über einer Ebne mn ein Perpendikel auf die Ebne zu fällen.

Aufl.

Aufl. 1) Man fälle auf eine in der Ebne mn nach Belieben gezogene Linie bd ein Perpendikel ac aus a (68).

2) Man errichte aus c in der Ebne mn ein Perpendikel cf.

3) Man lasse aus a auf cf ein Perp. af fallen, so wird dieses das verlangte seyn.

Beweis. Nach no. 1 und 2. wird bc auf der Ebne acf senkrecht stehen (250). Man ziehe nun mit bd eine Parallele eg durch f, so wird auch ef auf acf senkrecht stehen (257). Es steht also af sowohl auf cf als ef senkrecht, folglich steht es auf der ganzen mn senkrecht (250).

§. 262.

Aufg. Aus einem in der Ebne mn gegebnen Punkt o, ein Perpendikel aufzurichten.

Aufl. 1) Man lasse aus einem beliebigen Punkt über der Ebne ein Perpendikel af auf sie fallen (261).

2) Man ziehe mit demselben durch o eine Parallele (94) diese wird das Perpendikel seyn.

Beweis. Er fließt unmittelbar aus (257).

§. 263.

Zus. Von einem Punkt a kann auf eine Ebne nur ein einziges Perpendikel fallen; dies folgt hier eben so wie in (76); auch aus einem Punkte in

der Ebne kann nicht mehr als eins auf die Ebne gesetzt werden; desgleichen kann auch ein Perpendikel auf einer Ebne nicht zugleich auf einer andern welche durch den Punkt geht, wo es in die Ebne trift, senkrecht stehen, weil es sonst 2 rechte Winkel geben müßte, von welchen der eine ein Theil des andern wäre und dies stritte gegen (33).

§. 264.

Zus. Ein Perpendikel aus einem Punkt auf eine Ebne ist eben so wie in (81) die kürzeste Linie, welche aus diesem Punkt auf die Ebene kann gezogen werden.

§. 265.

Lehrs. Zwey parallele Linien ac, $\alpha\gamma$ Fig. 110. haben gegen einerley Ebne ab$\beta\alpha$ einerley Neigung.

Beweis. Man lasse aus den Punkten c und γ Perpendikel cd und $\gamma\delta$ auf die Ebne herab, so sind die Winkel bey d und δ (33) und die bey c und γ (259), folglich auch die bey a und α gleich (114).

§. 266.

Lehrs. Wenn eine Linie auf 2 Ebnen zugleich senkrecht steht, so müssen dieselben parallel gehen.

Beweis. Wenn sie nicht parallel giengen, so müßten sie einander schneiden und dann würde ein

△ ent-

△ entstehen, in welchem 2 rechte Winkel wären, welches aber gegen (110) streitet.

§. 267.

Aufg. Durch einen gegebnen Punkt a, über einer Ebne mn Fig. 111. eine andere mit jener parallel zu legen.

Aufl. 1) Man lasse von a ein Perpendikel auf mn fallen (261) und ziehe durch den Punkt f, wo es in sie trift, ein paar Linien fg und fc.

2) Durch a ziehe man eine Parallele ah mit fg und auch eine ai mit fc, so werden die Punkte aih die parallele Ebne bestimmen.

Beweis. Weil ah und ai parallel mit fg und fc, und bey f rechte Winkel sind, so werden auch dergleichen bey a seyn müssen (101); folglich steht fa auf der Ebne ahi senkrecht, und diese ist deshalb mit mn parallel (266).

§. 268.

Zus. Durch a geht nur eine Ebne mit mn parallel, weil nicht mehr als eine Parallele ah, ai, mit fg, fc durch a gehen kann (98). Wenn also eine Linie auf einer von zwey parallelen Ebnen senkrecht steht, so steht sie auch auf der andern senkrecht; dies ist auch schon deshalb nothwendig weil es sonst Parallelen geben würde, wo innere entgegengesetzte Winkel mehr oder weniger als 2 rechte machten.

§. 269.

Lehrs. Alle Ebnen acf; afg welche durch eine auf einer Ebne mn senkrechtstehende Linie af gehen, stehen auf dieser Ebne senkrecht.

Beweis. Die Linie af welche sich in allen durch sie gehenden Ebnen befindet, macht den einen Schenkel des Neigungswinkels dieser Ebnen mit der mn aus (255) und der andere liegt in der mn selbst; da nun af auf allen diesen andern Schenkeln senkrecht steht (250), so müssen auch alle durch sie gehende Ebnen auf mn senkrecht seyn.

§. 270.

Zus. Hinwiederum wird der Durchschnitt af zweyer, auf einer dritten senkrechten Ebnen, auf dieser dritten auch senkrecht seyn, denn af steht auf den beyden verschiedenen Linien senkrecht, in welchen die beyden Ebnen die dritte schneiden (250).

§. 271.

Zus. Eine Linie die in einer auf einer andern senkrecht stehenden Ebne auf beyder Ebnen Durchschnitt senkrecht gezogen wird, steht auf dieser andern Ebne senkrecht. Z. B. af welche sowohl auf fe als dem Schenkel des Neigungswinkels beyder Ebnen fc senkrecht ist (252).

§. 272.

Lehrs. Wenn zwey parallele Ebnen abp und cdq eine dritte abcd, schneiden, so sind ihre Neigungswinkel pmn und qnt gleich.

Beweis.

Beweis. Die Durchschnittslinien a b und c d sind parallel (254) man ziehe m t auf a b senkrecht, so wird sie auch auf c d senkrecht seyn (101). Man setze ferner auf a b c d durch m t eine Ebne p m t q senkrecht, so werden ihre Schnitte p m, q n mit den parallelen Ebnen auch parallel (254) und deshalb p m n und q n t welche die Neigungswinkel sind (252), gleich seyn (101).

§. 273.

Lehrs. Wenn ein paar Ebnen a p b **und** c d q **mit einer dritten** a c d b **auf einerley Seite gleiche Neigungswinkel machen und zugleich die Durchschnittslinien der Ebnen parallel sind, so sind die Ebnen selbst parallel.**

Beweis. Man ziehe wieder m t wie im Beweis des vorigen Satzes, und durch m ziehe man eine Linie m p in der Ebne a p b senkrecht, daß sie also mit m t den Neigungswinkel beyder Ebnen macht. a b steht also auf beyden Schenkeln dieses Neigungswinkels, folglich auf dessen Ebne senkrecht (250) und n d ebenfalls weil sie mit m b parallel ist (257). Wo diese Ebne die c q d schneidet, ziehe man die Linie n q welche auf n d senkrecht, und folglich q n t der Neigungswinkel der Ebnen c q d und a b c d seyn wird. Da nun die Neigungswinkel gleich seyn sollen, so wird m p mit n q parallel seyn (93). Läßt man nun ein Perpendikel p r aus einem Punkte der Linie m p auf q n oder deren Verlängerung, so wird solches auch auf p m senkrecht stehen (101)

und

und sich in der Ebne des Neigungswinkels, pmt, welche auf den Ebnen apb und cqd senkrecht steht, befinden, folglich auch auf diesen Ebnen senkrecht stehen und die Ebnen selbst werden parallel seyn (266).

§. 274.

Erkl. Wenn mehr als 2 ebene Winkel mit ihren Scheiteln und Schenkeln überall aneinander stoßen, so bilden sie einen Körperwinkel oder eine **Ecke**, z. B. die Winkel fed; fec und dec Fig. 113. Die Größe eines solchen Körperwinkels wird aus der Größe der genannten einzelnen Flächenwinkel bestimmt.

§. 275.

Erkl. Gedenkt man sich zwischen den andern Endpunkten der Schenkel eines Körperwinkels gerade Linien und Ebnen, welche von diesen Linien eingeschlossen werden, so entsteht ein Körper in der Bedeutung von (3). Sind bey einem solchen Körper alle Ebnen die ihn begrenzen, Figuren von einerley Art, d. i. lauter Dreyecke oder lauter Vierecke ꝛc. von einerley Größe und regulär (45), so heißt der Körper **regulär** und es ist leicht einzusehen, daß alsdann auch alle seine Körperwinkel gleich groß seyn werden (274).

§. 276.

Zus. Wenn die einzelnen Winkel welche den Körperwinkel bilden, eine Ebne, die sich rings um

ihren

ihren gemeinschaftlichen Scheitel befindet, ausfüll-
ten, so betrügen sie zusammen 360° (37); alsdann
aber würden sie auf keiner Seite eine Hohlung bil-
den, und folglich auch keinen körperlichen Raum
einschließen. Ein solcher Fall käme nun vor, wenn
der Körperwinkel aus 6 ebnen, jeder = 60°, wie
es beym regulären Dreyeck der Fall ist (111), be-
stehen sollte. Es kann also keinen regulären Kör-
per geben, wo der Körperwinkel aus 6 ebnen, wel-
che zu regulären Dreyecken gehören, bestünde.
Eben dies ist der Fall bey 4 rechten und also noch
mehr bey 4 stumpfen Winkeln. Weil zu einem
Körperwinkel wenigstens 3 ebne gehören (274), so ist
ein regulärer Körper möglich, dessen Winkel aus
3 gleichseitigen Dreyeckswinkeln = 180° besteht.
Dieser heißt das Tetraedrum. Ferner einer des-
sen Winkel aus 4 dergleichen = 240° besteht; die-
ser heißt Octaedrum. Ferner einer dessen Winkel
aus 5 solchen ebnen = 300° zusammengesetzt ist;
dieser heißt Icosaedrum. Noch einer, dessen Win-
kel aus 3 quadratischen Winkeln = 270° besteht,
und dies ist das Hexaedrum oder der Würfel. End-
lich noch einer, dessen Winkel aus 3 regulären
Fünfeckswinkeln = 324° (116) besteht, und dieser
heißt Dodekaedrum. Wollte man sich einen re-
gulären Körper gedenken, dessen Winkel von 3 re-
gulären Sechseckswinkeln gebildet wäre, so betrü-
gen dieselben zusammen gerade 360° (116) und lä-
gen deshalb wieder eben so wie 6 reguläre Drey-
ecks, und 4 quadratische Winkel, in einer Ebne.

Drey

Drey Winkel von regulären Vielecken welche mehr als 6 Seiten haben, betragen über 360°, geben also erhabne Körperwinkel deren Schenkel mit den übrigen, gleichfalls erhabnen, divergirend werden, und deshalb noch weniger so zusammenstoßen können, daß ein Raum wie ihn der reguläre Körper erfordert, von ihnen eingeschlossen werden könnte. Diese Betrachtnngen mögen hier zureichlich seyn zu übersehen, daß es nicht mehr als die genannten 5 regulären Körper giebt.

§. 277.

Erkl. Wenn sich eine Figur abc Fig. 113. in einem ihrer Punkte a an einer Linie af so hinau bewegt, daß während der Bewegung nicht allein der Winkel den ihre Ebne mit der af macht, un verändert, sondern auch jeder Theil ihres Umfangs mit sich selbst parallel bleibt, so beschreibt sie ein Ecksäule oder ein Prisma, welches drey = vier seitig u. s. w. heißt, je nachdem die bewegte Figu drey, vier u. s. w. Seiten gehabt hat. Es heiß senkrecht wenn die af auf der Ebne der be wegten Figur senkrecht, **schief**, wenn sie schief dar auf gestanden hat.

§. 278.

Zus. af kann auf der bewegten Figur in dop pelter Rücksicht schief stehen; indem zum senkrechten Stand erfordert wird, daß sie wenigstens au zwey Linien der Ebne senkrecht stehe (250). Si kann

kann also blos auf einer, oder auch auf beyden Linien schief stehen und deshalb giebt es Prismen welche einfach, und doppelt schief sind.

§. 279.

Zus. Jedes Prisma ist also ein Raum der in so viel Parallelogrammen eingeschlossen ist, als die sich bewegende Figur Seiten hat, und der überdies noch unten und oben von ein paar mit der bewegten Figur congruirenden Ebnen begrenzt wird; und alle Schnitte die mit der Grund- oder Oberfläche parallel geschehen, congruiren miteinander.

§. 280.

Zus. Wenn die sich bewegende Figur ein Parallelogramm ist, so ist das Prisma von lauter Parallelogrammen eingeschlossen. Es wird alsdann ein Parallelepipedum genannt; und dieses heißt wieder ein senkrechtes, wenn af auf der bewegten Ebne senkrecht gestanden hat. Ein rechtwinklichtes nennt man es, wenn das bewegte Parallelogramm ein Rechteck gewesen ist. Uebrigens congruiren bey jedem Parallelipipedum jede zwey einander gegenüber stehende Seitenflächen miteinander.

§. 281.

Zus. Ist beym senkrechten Prisma die bewegte Figur ein Quadrat, und af der Seite dieses Quadrats gleich, so entsteht der Würfel, welcher also in 6 gleiche Quadrate eingeschlossen ist.

§. 282.

Zus. Wenn die sich bewegende Ebne ein Kreis ist, und sich in eben derselben Richtung bewegt, wie beym Prisma die eckigte Figur, so entsteht eine Walze oder ein Cylinder, der in eben dem Verstande senkrecht oder schief heißt, wie das Prisma. Ein senkrechter Cylinder wird auch beschrieben, wenn sich ein Rechteck um eine seiner Seiten bewegt.

§. 283.

Zus. Ein Cylinder kann angesehen werden als ein Prisma von unendlichen Seiten und seine runde Oberfläche ist gleichsam aus unendlich vielen, unendlich schmalen Parallelogrammen zusammengesetzt. Grund- und Oberfläche sind so wie alle damit parallel gehende Schnitte, Kreise. Die Linie welche durch die Mittelpunkte dieser Kreise geht, ist parallel mit af und folglich gerade; man nennt sie die Axe des Cylinders. Wenn der Cylinder mittelst eines Rechtecks beschrieben wird (282), so ist die Seite des Rechtecks um welche die Bewegung geht, die Axe des Cylinders.

§. 284.

Aufg. Ein paar Prismen von gleichen Grundflächen und zwischen Parallelen, Fig. 113. sind gleichen Inhalts.

Beweis. Man gedenke sich für jedes Element der af, welche itzt senkrecht auf der Grundfläche

den

des Prisma angenommen werde, einen Schnitt des Prisma der mit seiner Grundfläche parallel ist, so wird es aus so viel gleichen Elementarscheiben bestehen, als gleiche Elemente in af angenommen werden können. Ist nun gk ein Perpendikel von der Oberfläche des andern auf seine verlängerte Grundfläche, so ist gk = af (103) und man wird in gk eben solche und eben so viele Elemente annehmen können, als in af. Gedenkt man sich also von f und g an, Linien von den Grenzpunkten der einzelnen Elemente in af und gk so wird zwischen jedes Paar solcher auf einander folgender Linien eine Elementarscheibe des Prisma ad und eine eben so große des Prisma ah fallen und die Anzahl von beyden wird gleich seyn und folglich das eine Prisma mit dem andern gleichen Inhalt haben.

In der hier gebrauchten Figur congruiren die Grundflächen der beyden Prismen, allein es folgt die Gleichheit der Prismen eben so gut, wenn man die Grundflächen nicht congruent, sondern blos von gleichem Inhalt annimmt.

§. 285.

Anm. Weil $ag > af$, (80) so möchte man denken, daß aus dem schiefen Prisma mehr gleiche Elementarscheiben geschnitten werden könnten, als aus dem senkrechten. Allein man muß erwägen, daß, wenn der Punkt a durch ag nach g geht, es anzusehen ist, als ob er zugleich den Weg durch ak und kg gemacht hätte, und nun ist leicht einzusehen, daß blos in Rücksicht der Bewegung

durch k g, die Elementarscheiben woraus das Prisma besteht, aufgehäuft werden, keinesweges aber in Rücksicht der Bewegung durch a k, denn dadurch geschieht nichts weiter, als daß jede folgende Scheibe etwas weiter als die vorige gegen k g hingerückt wird.

§. 286.

Aufg. Ein jedes Prisma auszumessen.

Aufl. 1) Man berechne die Grundfläche desselben nach (204, 214, 219).

2) Man multiplicire dieselbe mit der Höhe des Prisma, nachdem man sie in eben dem Maaße ausgedrückt hat, als zu Berechnung der Grundfläche ist gebraucht worden, so giebt das Product das verlangte Maas des Prisma.

Beweis. Man wähle vor der Hand zu dem auszumessenden Prisma ein rechtwinklichtes Parallelepipedum a d Fig. 114, wo z. B. a b $= 4^{I}$, b c $= 3^{I}$ und c d $= 2^{I}$, so muß man hierzu wieder ein Maas nehmen, welches mit der auszumessenden Größe gleichartig ist, nemlich ein körperliches. Aus ähnlichen Gründen, warum man zum Flächenmaas das Quadrat nahm (204), hat man beym körperlichen den Würfel genommen; und es heißt ein Würfel, dessen Seite $= 1^{\circ}$ oder 1^{I} u. s. w. eine Würfel- oder Kubikruthe, ein Kubikfuß ꝛc. Ein solcher Kub. F. sey nun in der Figur b k, so wird er auf der Grundfläche b c d h so vielmal stehen können, als sie Quadratfuß enthält, hier 6 mal; man erhält

hält also, indem man das Maaß: 1 Kub. Fuß mit der Zahl 6 multiplicirt, eine Schicht von 6 Kub. Fuß, und diese Schicht wird von der Höhe des ganzen Körpers nicht mehr als 1 Längenfuß wegnehmen. Weiß man also, daß diese Höhe 4 Längenfuß beträgt, so haben jene 6 K. F. im ganzen Körper viermal Raum; also 6 K. F. mit der Zahl 4 multiplicirt, wird für den Inhalt des ganzen Körpers geben 24 Kub. F.

Heißen überhaupt die 3 auf einander senkrecht stehenden Eckseiten: a, b, c und sind z. B. in Fußen ausgedrückt, so wird der Inhalt des Körpers abc Kub. F. halten.

Ist die Grundfläche kein Rechteck, sondern irgend eine andere Figur, so stellt man sich vor, daß sie in ein Rechteck sey verwandelt worden (125). Eben so, wenn ab nicht senkrecht auf die Grundfläche, der Körper nemlich ein schiefes Prisma wäre, so nähme man statt ab ein Perpendikel zwischen der Grund- und Oberfläche und sähe dies als die Seitenlinie eines andern Prisma an, das dem welches man vor sich hat, gleich ist (284). Auf diese Art erhellet, wie die gegebne Auflösung für alle Prismen paßt, und daß, wenn im Allgemeinen die Grundfläche = g, die Höhe = h ist, und durchaus einerley Maas gebraucht wird, der Inhalt eines jeden Prisma durch das Product hg ausgedrückt werden kann.

§. 287.

Zus. Wenn man einen Würfel auszumessen hat, dessen Seite a heißt, so wird sein Inhalt seyn = a^3. Ist z. B. a = 1^0 = 10^I, so ist a^3 = 1000 Kub. Fuß; d. i. eine Kubikruthe hält 1000 Kub. F. und aus ähnlichen Gründen 1 K. F. wieder 1000 K. Zolle; 1 K. Zoll 1000 Kub. Lin. u. s. w. so daß man hier bey der Reduction immer mit 1000 multipliciren oder dividiren muß.

§. 288.

Zus. Beym senkrechten Cylinder ist die Grundfläche g, ein Kreis, und die Höhe h der Axe desselben gleich. Wenn also der Halbmesser des Cylinders = r, gegeben ist, so ist nach (235. VII.) g = 3, 14 . . r^2 und der Inhalt des Cylinders = 3, 14 . . r^2 h. Wenn z. B. r = 3; h = 4 so hält der Cylinder 113, 04 Kub. F. = 113^I 40^{II}.

§. 289.

Zus. Am Ende des Beweises (286) wurde das Prisma durch h g ausgedrückt; wäre nun eines andern Prisma Höhe = H und seine Grundfläche = G, so wäre der Inhalt von diesem H G und es verhielt sich jenes zu diesem = h g : H G. Wäre h = H, so hätte man = g : G (203. Nr.) oder wenn g = G, so hat man zu den Verhältnißgliedern h : H d. i. wenn zwey Prismen (worunter auch Cylinder mit begriffen sind) gleiche Höhen haben, so verhalten sie sich wie ihre Grundflächen

und wenn sie gleiche Grundflächen haben, so verhalten sie sich wie die Höhen.

§. 290.

Zus. Wären bey den beyden Prismen oder Cylindern, weder Grundflächen noch Höhen, aber die Körper selbst einander gleich, so würde sich die Höhe des erstern zur Höhe des letztern verhalten wie die Grundfläche des letztern zur Höhe des erstern; denn alsdann wäre h g = H G, also nach (229. Ar.) h : H = G : g.

§. 291.

Zus. Da die Grundflächen der Cylinder Kreise sind (282), und sich diese wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten (22?), so werden sich ein paar Cylinder von gleichen Höhen auch wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten.

§. 292.

Erkl. Wenn man von einem Cylinder db Fig. 115. den Durchmesser seiner einfachen, ab, doppelten, dreyfachen u. s. w. Grundfläche auf die eine Seite eines Stabes und auf die andere die Höhe dieses Cylinders ad mehreremale trägt, so nennt man diesen einen cylindrischen Visirstab.

§. 293.

Aufg. Einen cylindrischen Visirstab zu verfertigen.

Aufl. 1) Man setze auf eine Linie a b Fig. 116 die so groß als der Durchmesser eines einfachen Cylinders ist, ein Perpendikel a c von grösserer, übrigens aber unbestimmter Länge.

2) Man trage a b in a 1 auf diesem Perpendikel; ferner b 1 aus a in a 2, so ist dies der Durchmesser der doppelten Grundfläche. Ferner b 2 aus a in a 3, so erhält man den Durchmesser der dreyfachen u. s. w.

3) Auf die andere Seite des Stabes trägt man die Höhe des Cylinders a d so vielmal als es angeht, nemlich in m I u. s. w.

Beweis. No. 1 und 2. ergeben sich leicht aus (289, 291) und no. 3. ist für sich klar.

§. 294.

Aufg. Den Inhalt eines Cylinders mittelst dieses Visirstabes zu finden.

Aufl. 1) Man sehe wie viel der Durchmesser des auszumessenden Cylinders an Theilen von a c hält z. B. 6.

2) Man sehe auch wie viel die Höhe desselben von dem Maaße der Linie m n enthält, z. B. $2\frac{1}{2}$.

3) Man multiplicire beyde Maaße durch einander, so zeigt das Product an, wie viel solcher Cylinder wie a d Fig. 115. den man als die Einheit oder als das Maas annimmt, im auszumessenden enthalten sind; hier nemlich 15.

Beweis

Beweis. Nach no. 1. findet man wie vielmal der Cylinder a d im auszumessenden enthalten ist, wenn dieser letztere mit jenem gleiche Höhe hätte (291). Da nun dieser Inhalt doppelt, dreyfach u. s. w. vorhanden seyn muß, wenn die Höhe doppelt, dreyfach rc. ist, so erhellet die Richtigkeit der Vorschrift.

§. 295.

Anm. Man bedient sich dieser Visirstäbe besonders um den Inhalt der Fässer auf eine leichte Art zu finden. Da aber diese keine cylindrische Form haben, so reducirt man sie dadurch zu einer solchen, daß man zwischen ihrem größten und kleinsten Durchmesser m q und p n Fig. 118. das arithmetische Mittel v w nimmt (225. Ar.) und dieses als den Durchmesser eines Cylinders s t z y ansieht, der bey gleicher Länge s y mit dem Fasse, gleichen Inhalt mit demselben hat. Dieses Verfahren ist aber nicht geometrisch genau, sondern nur ohngefähr richtig. Auch ist selbst beym Visiren eines wirklichen Cylinders keine vollkommene Genauigkeit vorhanden, wenn der Durchmesser nicht gerade auf eine Zahl in a c Fig. 116, sondern zwischen ein paar derselben trift. Z. B. wenn er zwischen 3 und 4 in die Mitte träfe, so wäre er nicht genau der Durchmesser eines Cylinders der $3\frac{1}{2}$ grösser als der zur Einheit angenommene ist, und dieses deswegen, weil die Durchmesser der vielfachen Grundflächen nicht gleichförmig mit denselben wachsen.

§. 296.

Anm. Man hat noch einen andern Visirstab den man den cubischen nennt und welcher sich auf

den Satz gründet, daß sich ähnliche Körper wie die Kubi ähnlich liegender Seiten von ihnen verhalten. Wenn er zu Fässern soll gebraucht werden, so setzt er voraus, daß die Fässer alle nach einerley Form gebaut sind, und das Maaß auch nach der Form eines solchen Fasses gemacht ist. Ein solches Maaß sey a c Fig. 117; gesetzt es halte 1 Kanne, so nehme man irgend eine Abmessung von ihm, z. B. a b und trage sie auf eine Linie a c Fig. 119. in a 1. Das Maaß dieser Linie erhebe man zur dritten Potenz, verdoppele dieselbe und ziehe aus dem Duplum die Kubikwurzel (188. Nr.); diese Wurzel trage man in a 2, so wird ein Faß von gleicher Form wie Fig. 118; zwey Kannen enthalten, wenn die Linie m n so groß als a 2 ist. Eben so triplirt, quadruplirt &c. man den von a b erhaltenen Kubus und zieht jedesmal die Kubikwurzel aus, so erhält man in a c die Punkte 3, 4 u. s. w. Beym Gebrauch dieses Visirstabes hat man also gar keine Rechnung nöthig, sondern man stößt ihn blos in der Richtung von m n ins Faß und sieht nach, was für eine Ziffer bey m steht.

§. 297.

Zus. Wenn man ein hohles Prisma z. B. die Bekleidung eines Pfeilers ausmessen sollte, so müßte man die Grundfläche des bekleideten und die des unbekleideten Pfeilers besonders messen und den Unterschied zwischen beyden mit der Höhe multipliciren. Auf ähnliche Art erhält man den Inhalt eines hohlen Cylinders z. B. einer Brunnenröhre, wenn man den Ring (243) mit der Höhe multiplicirt.

§. 298.

§. 298.

Aufg. Die Oberfläche eines Prisma auszurechnen.

Aufl. Da seine Seitenflächen nach (279) aus lauter Parallelogrammen bestehen, so rechne man sie einzeln aus (204, 212), addire sie und setze zu ihrer Summe noch das Duplum der Grundfläche, so hat man die ganze Oberfläche.

Beweis. Er ergiebt sich aus den angezognen §§. von selbst.

§. 299.

Zus. Bey einem senkrechten Prisma werden die Seitenflächen Rechtecke und haben eine gemeinschaftliche Höhe, die der des Prisma gleich ist. Heißen also ihre einzelnen Grundlinien a, b, c u. s. w. und die Höhe h, so betragen sie zusammen $ah + bh + ch \ldots = (a + b + c \ldots) h$ (132. Ar.).

§. 300.

Zus. Die runde Oberfläche eines senkrechten Cylinders ist anzusehen als ein Rechteck, von welchem die Grundlinie dem Umkreis und die Höhe der Axe des Cylinders gleich ist. Ist also sein Durchm. $= d$ und seine Axe $= h$, so ist die runde Fläche $= 3,14 \ldots dh$ (235, III.).

§. 301.

Erkl. Wenn man über einer geradlinigten Figur bcd Fig. 119. einen Punkt a nimmt und aus

demselben eine gerade Linie durch alle Punkte des Umfangs der erwehnten Figur führt, so beschreibt diese Linie über der Ebne der Figur eine Pyramide. Die ebd heißt nun die Grundfläche der Pyramide und über ihr entstehen so viel Dreyecke als sie Seiten hat, bda; dae; bae, welche ihre Spitzen sämmtlich in a haben. Nach der Menge dieser Dreyecke heißt sie 3, 4, 5 seitig u. s. w.

§. 302.

Zus. Wenn sich die Grundfläche der Pyramide in einen Kreis beschreiben läßt (46) und ein Perpendikel ac aus a durch den Mittelpunkt dieses Kreises c geht, so erhält man, wenn in jede Ecke der Grundfläche Halbmesser gezogen werden, so viel rechtwinklichte Dreyecke als Ecken vorhanden sind. Alle diese Dreyecke congruiren miteinander (51), weil ac allen gemeinschaftlich, und die Halbmesser nebst den rechten Winkeln welche sie mit ac einschließen, durchaus gleich sind. Da man nun die Hypothenuse dieser Dreyecke Seitenlinien der Pyramide nennt und diese alle einander gleich sind, so heißt auch die ganze Pyramide eine gleichseitige.

§. 303.

Zus. Wenn die Grundfläche eine reguläre Figur ist (45) und sich noch unter den Umständen des vorigen §. befindet, so sind alle die auf den Seiten der Grundfläche stehenden Dreyecke gleichschenklicht und congruent. Man pflegt eine solche Pyramide

ramide eine senkrechte und die ac ihre Axe zu nennen.

§. 304.

Zus. Läßt sich aber die Grundfläche nicht in einen Kreis beschreiben, so können auch die Seitenlinien der Pyramiden nicht gleich werden und die Pyramide heißt nun ungleichseitig, und wird übrigens so wie die in (302), zu den schiefen gerechnet. Noch eine ungleichseitige und schiefe kann entstehen, wenn über einer Figur die sich in einen Kreis beschreiben läßt, sich die Spitzen der Dreyecke in einen solchen Punkt vereinigen, wo ein Perpendikel von ihm auf die Ebne der Grundfläche nicht durch den Mittelpunkt des Kreises geht.

§. 305.

Erkl. Wenn sich eine Linie wie in (301) um einen Kreis bewegt, so beschreibt sie über demselben einen Kegel. Dieser entsteht auch aus der senkrechten Pyramide (303) wenn sich ihre Grundfläche in einen Kreis verwandelt. Eine Linie von der Spitze des Kegels durch den Mittelpunkt der Grundfläche, heißt seine Axe. Senkrecht heißt der Kegel, wenn diese Axe senkrecht, schief, wenn sie schief auf der Grundfläche steht.

§. 306.

Zus. Ein senkrechter Kegel entsteht auch, wenn sich ein rechtwinklichtes Dreyeck acb Fig. 120. um einen seiner Katheten herum bewegt. Alle Seiten-

tenlinien dieses Kegels sind gleich, weil sie sämmtlich der Hypothenuse des bewegten Dreyecks gleich sind, daher heißt der senkrechte Kegel auch gleichseitig. Bey dem schiefen werden sie nicht gleich seyn, weil ein Perpendikel auf die Grundfläche in einen Punkt trift der verschiedene Entfernungen von verschiedenen Punkten des Umkreises hat. Der schiefe Kegel ist also ungleichseitig.

§. 307.

Zus. Wenn man durch die Axe des senkrechten Kegels eine Ebne legt, so wird der Schnitt ein gleichschenklichtes Dreyeck a b f und der Kegel heißt spitzwinklicht, rechtwinklicht, oder stumpfwinklicht, je nachdem der Winkel a an der Spitze des Dreyecks spitzig, recht, oder stumpf ist. Das erste wird der Fall seyn, wenn $bc < ac$; das zweite wenn $bc = ac$ und das dritte wenn $bc > ac$ (78, 1 0). Eben dieses kann auch von der senkrechten Pyramide gelten wenn die Zahl der Seiten in ihrer Grundfläche gerade ist, und die schneidende Ebne nicht allein durch die Axe sondern auch durch ein paar Seitenlinien gelegt wird.

§. 308.

Lehrs. Wenn eine Pyramide Fig. 119, mit ihrer Grundfläche parallel geschnitten wird, so ist die auf dem Schnitt entstehende Figur der Grundfläche ähnlich.

Beweis.

Beweis. Die Linien b e und B E; b d und B D; d e und D E sind parallel (254). Man gedenke sich also, daß die obern Linien b d u. s. w. mit beständiger Beybehaltung ihres Parallelismus herunter, in die Ebne b d e gelassen werden, so wird b d e der B D E ähnlich seyn (190. no. 1.).

§. 309.

Zus. Wenn ein senkrechter Kegel nach (306) beschrieben wird, so erhellet, daß alle Schnitte die mit der Grundfläche parallel gehen, Kreise sind. Denn man kann sich in dem rechtwinklichten Dreyecke a b c welches den Kegel beschreibt, eine Menge Linien wie d e, mit der Grundlinie parallel gedenken, und alle diese Linien werden als Halbmesser jener Kreise anzusehen seyn.

§. 310.

Zus. Auch in einem schiefen Kegel Fig. 121. sind die Schnitte welche mit der Grundfläche parallel gehen, Kreise. Denn man ziehe die Seitenlinien des Kegels a d und a f; die Halbmesser c d und c f und die Axe a c, so ist in den ähnlichen Dreyecken a c d und a e b; a c f und a e g.

$$\left.\begin{array}{l} ac : ae = cd : eb \\ ac : ae = cf : cg \end{array}\right\} (190)$$

folglich $cd : eb = cf : eg$ (204. Ar.)

Da nun $cd = cf$ (24) so wird auch $eb = eg$, also können die Linien e b; e g ꝛc. Halbmesser eines

nes Kreises vorstellen von welchem e der Mittelpunkt ist.

§. 311.

Lehrs. Wenn eine Pyramide mit ihrer Grundfläche parallel geschnitten wird, so verhalten sich die Grundflächen der dadurch entstandenen beyden Pyramiden, wie die Quadrate ihrer Höhen.

Beweis. Es sey a c ein Perpendikel auf die Grundfläche BDE, so wird es auch auf die Ebne des Schnittes b d e senkrecht seyn (225). Man lege die Ebne a B c durch die Seitenlinie a B und das Perpendikel a c, so sind die Schnitte B c und b γ welche die parallelen Ebnen damit machen, parallel (254)

und es ist $a\gamma : ac = ab : aB$ (183)

$ab : aB = be : BE$

also $a\gamma : ac = be : BE$ (204. Ar.)

Nun ist $\Delta\, BDE : \Delta\, bde = BE^2 : be^2$ (225, 293)

folglich auch $\Delta\, BDE : \Delta\, bde = ac^2 : a\gamma^2$ (231. VI. Ar.)

§. 312.

Zus. Da man die Kegel als Pyramiden von unendlichen Seiten ansehen kann, so werden sich auch Fig. 120. die parallelen Kreise bcfb und degd wie die Quadrate von a c und a e zu einander verhalten.

§. 313.

Lehrs. Ein paar Pyramiden über einerley Grundfläche und zwischen parallelen Ebnen Fig. 119. sind gleiches Inhalts.

Beweis. Man gedenke sich das Perpendikel a c zwischen den parallelen Ebnen, so stellt dieses die Höhe von beyden Pyramiden vor. Man stelle sich wieder wie im Beweis zu (284) vor, daß es in einzelne gleiche Elemente getheilt sey und daß durch jedes eine Scheibe mit der Grundfläche parallel gelegt worden, so werden durch die eine Pyramide nicht mehr solcher Scheiben gehen, als durch die andere. Eine solche Scheibe gehe nun auch durch den Schnitt b ε, so erhält man davon in der einen Pyramide ein Stück dessen Grundfläche = b d e und in der andern eins dessen Grundfläche = β δ ε. Wegen der angenommenen unendlichen Dünnigkeit wird die obere Fläche dieser Scheibenstücken von ihrer untern nicht merklich verschieden seyn, so daß man sie als Elementarscheiben eines Prisma dessen Grundfläche = b d e oder = β δ ε, ansehen darf. Nun war nach dem Beweis zum vorigen §. △ BDE : △ bde = $ac^2 : \alpha\gamma^2$ folglich

$$\triangle\, bde = \triangle\, \frac{BDE.\, \alpha\gamma^2}{ac^2}.$$ Aus völlig gleichen Gründen kann man nun auch setzen

$$\triangle\, \beta\delta\varepsilon = \triangle\, \frac{BDE.\, \alpha\gamma^2}{ac^2}$$ folglich

△ bde = △ β δ ε, mithin auch das über △ b d e liegende Scheibenstück so groß als

das

das über $\beta\delta\varepsilon$ liegende (284). Was nun von diesen beyden Stücken gilt, läßt sich auch von allen übrigen behaupten und ihre einzelnen Summen werden deshalb einander gleich seyn. Da nun die eine Summe die Pyramide aBDE und die andere die αBDE ausmacht, so werden diese beyden Pyramiden gleich seyn.

§. 314.

Zus. Da sich jede vielseitige Pyramide in dreyseitige von eben der Höhe zertheilen läßt, wenn man in der Grundfläche der vielseitigen, Diagonalen zieht, so gilt der Beweis auch für alle vielseitigen Pyramiden, folglich auch für Kegel. Ja, wenn der eine von den beyden gleich hohen Körpern eine Pyramide, und der andere ein Kegel ist, so sind auch diese einander gleich, wenn nur ihre Grundflächen gleichen Inhalt haben.

§. 315.

Lehrs. Ein dreyseitiges Prisma Fig. 122. **läßt sich in drey Pyramiden zerschneiden die alle gleiches Inhalts sind.**

Beweis. Es läßt sich erstlich eine Pyramide abce Fig. 123; und dann eine fedc Fig. 124, wegnehmen, diese beyden haben gleiche Grundflächen abc; edf (279) und gleiche Höhen, nemlich die Höhe des Prisma cf, folglich sind sie gleich (284). Eben so haben cfde und die nach Wegnehmung jener beyden übrigbleibende dritte cbde

Fig.

Fig. 122. gleiche Grundflächen cdf und cdb, indem dieselben aus der Theilung eines das Prisma einschließenden Parallelogramms mittelst dessen Diagonale cd, entstanden sind; über dieses eine gemeinschaftliche Höhe, nemlich ein Perpendikel eg aus e auf fd, folglich sind auch diese, und mithin alle drey, einander gleich. Man sieht dieses deutlicher an einem Prisma von Holze das auf die erwehnte Weise zerschnitten ist.

§. 316.

Zus. Da sich jedes vielseitige Prisma durch Diagonalen in seiner Grundfläche, in dreyseitige von gleicher Höhe zertheilen läßt, so wird auch eine vielseitige Pyramide als der dritte Theil eines Prisma, und mithin jeder Kegel als der dritte Theil eines Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe mit ihm, anzusehen seyn (283, 305). Desgleichen wird nun auch von Pyramiden und Kegeln eben das gelten, was in (289, 290, 291) von Prismen und Cylindern ist gesagt worden, weil sie die Drittel von denselben sind.

§. 317.

Aufg. Den körperlichen Inhalt einer Pyramide oder eines Kegels zu finden.

Aufl. Man suche die Grundfläche und Höhe; multiplicire beyde ineinander, und dividire das Product durch 3: so giebt der Quotient den Inhalt.

Beweis. Er fließt unmittelbar aus (316).

§. 318.

Zus. Es sey die Grundfläche b, und die Höhe a, so ist der Inhalt $= \frac{a\ b}{3} = \frac{1}{3}\ a.\ b = \frac{1}{3}\ b.\ a$ Man kann also auch die Grundfläche blos mit dem 3ten Theil der Höhe, oder die Höhe mit dem 3ten Theil der Grundfläche multipliciren.

§. 319.

Zus. Wenn der Durchmesser eines Kegels $=$ d und seine Höhe $=$ h, so ist sein Inhalt $= \frac{1}{3}$ h. 0, 785 . . d^2 (235. VIII.).

§. 320.

Aufg. Den Inhalt einer abgekürzten Pyramide BDE edb Fig. 126. zu finden.

Aufl. und Beweis. Die abgekürzte Pyramide b E bleibt übrig, wenn man von der ganzen aBDE die kleine abde wegnimmt. Da die Grundflächen der beyden Pyramiden gegeben sind, so hat man nur noch die Höhen von ihnen zu wissen nöthig, um sie auszurechnen. Man lege durch a eine Ebne parallel mit den Grundflächen und lasse von einer Ecke der großen Pyramide B ein Perpendikel Bg auf diese Ebne, so wird dieses die Höhe der großen Pyramide seyn; und wenn man die Ebne bde erweitert bis sie das Perpendikel erreicht, so wird fg die Höhe der kleinen seyn.

Bf kann man messen, also braucht nur Bg gefunden zu werden, da dann fg = Bg — Bf.

Nun ziehe man in einer Seitenfläche der abgekürzten Pyramide BbdD aus b eine Parallele bk, mit dD, so wird Bk = Bd — bd, weil kD = bd (102, 254) und man hat

$$Bk : BD = Bb : Ba$$

und $Bb : Ba = Bf : Bg$

also $Bk : BD = Bf : Bg$.

Es entsteht also folgende Auflösung: Man ziehe eine Seite der obern Fläche von der ihr gleichnahmigen in der untern ab, und suche zwischen diesem Unterschiede, der untern Seite und dem senkrechten Abstande beyder Flächen, die vierte Proportionallinie, so erhalt man die Höhe der ganzen Pyramide. Man ziehe hiervon den senkrechten Abstand beyder Flächen ab, so hat man die Höhe der fehlenden kleinern. Nun rechne man beyde nach (317) aus, und ziehe die kleinere von der größern ab.

§. 321.

Zus. Beym abgekürzten Kegel Fig. 121. legt man eine Ebne adh durch die Axe des Kegels; so hat man hier dn — bm : dn = hk : ah.

§. 322.

Anm. Andere Regeln, abgekürzte Pyramiden und Kegel zu berechnen, findet man in den Zusätzen zum 02 Satz der Kästn. Geom. wo auch diese

Aufgaben auf Berechnung der Gewichte und Baumstämme angewandt, und gezeigt wird, wie sehr man fehlt, wenn man diese abgekürzten Körper als Prismen oder Cylinder von der nämlichen Höhe ansieht, deren Grundfläche das arithmetische Mittel (225. Ar.) zwischen den beyden Flächen ist, welche den abgekürzten Körper parallel einschließen. Solche Abweichungen von der Wahrheit hat man sich unter andern auch in der Fortification bey Berechnung abgekürzter Pyramiden erlaubt, weil hier ein mäßiger Fehler nicht sehr nachtheilig wird.

§. 323.

Aufg. Die Seitenflächen einer Pyramide auszurechnen.

Aufl. Da sie sämmtlich aus Dreyecken bestehen, so rechne man eins nach dem andern aus (214), und addire ihre Maaße alsdann zusammen.

Beweis. Er beruht auf (301).

§. 324.

Zus. Wenn die Grundfläche der Pyramide eine um den Kreis beschriebene Figur ist (46), und ein Perpendikel aus ihrer Spitze durch den Mittelpunkt dieses Kreises geht, so sind die Grundlinien der Seitenflächen Tangenten des Kreises; und die Halbmesser welche an die Berührungspunkte gezogen werden, stehen auf diesen Grundlinien senkrecht (142); auch stehen die Ebnen welche durch das Perpendikel und die Halbmesser gelegt

legt werden, auf der Grundfläche, und mithin auch die Linien welche von der Spitze der Pyramide auf die Berührungspunkte gezogen werden, auf den Grundlinien der Seitenflächen, senkrecht (255). Da nun diese die Höhen der Seitenflächen, und alle einander gleich sind, (51) so wird die Summe aller Seitenflächen sogleich gefunden, wenn man den ganzen Umfang der Grundfläche der Pyramide mit der Hälfte einer solchen Höhe multiplicirt.

§. 325.

Zus. Beym senkrechten Kegel kann man die Seite desselben als die gemeinschaftliche Höhe aller der unzähligen Dreyecke ansehen, welche seine krumme Fläche ausmachen, und der Umkreis seiner Grundfläche stellt die Summe aller Grundlinien jener Dreyecke vor; also wird die Seitenfläche gefunden, wenn man den Umkreis der Grundfläche mit der halben Seite multiplicirt (239).

§. 326.

Erkl. Wenn sich ein Halbkreis adb Fig. 127. um seinen Durchmesser ab bewegt, so beschreibt er eine Kugel, und der Durchmesser heißt nun die Axe derselben.

§. 327.

Zus. Die Kugel hat mit dem Kreise der sie beschrieben hat, den Mittelpunkt, Halbmesser und

Durchmesser gemein; und es sind in der Kugel alle Halb- und Durchmesser eben so einander gleich, wie im Kreise.

§. 328.

Zus. Wenn der Halbkreis welcher die Kugel beschreibt, die Hälfte seines Weges vollendet hat, so ist die Kugel nur zur Hälfte beschrieben, und seine letztere Lage macht mit der erstern den ganzen Kreis a d b δ. In diesem Betracht kann man sich auch vorstellen, daß die halbe Kugel durch die Bewegung des Halbkreises δ a d um den Durchmesser δ d, und überhaupt um jeden beliebigen dieses Kreises, sey beschrieben worden.

§. 329.

Zus. Wenn c d durch den Mittelpunkt auf die Axe senkrecht ist und h f, g e, mit c d parallel sind, so sind sie kleiner als c d und zwar immer um desto kleiner, je weiter sie vom Mittelpunkt entfernt sind (140). Nun können diese Parallelen als Halbmesser angesehen werden, welche bei Beschreibung der Kugel immer kleinere Kreise beschreiben, so wie sie selbst kleiner werden. Wenn also die Kugel von einer Ebne geschnitten wird und der Schnitt nicht durch ihren Mittelpunkt geht, so wird der auf ihrer Oberfläche dadurch entstehende Kreis immer um desto kleiner, je größer die Entfernung der schneidenden Ebne vom Mittelpunkt ist; und alle durch den Mittelpunkt

gehen

gehende Schnitte geben einerley größten Kreis. Eine Ebne welche auf dem Ende des Halbmessers senkrecht steht, berührt die Kugel blos, ohne sie zu schneiden. Dies ist hier eben der Fall wie in (141. I.) mit der geradenen Linie, und eine solche Ebne ist deshalb als die Tangente der Kugel anzusehen.

§. 330.

Zus. ca geht durch den Mittelpunkt aller mit hf, ge, beschriebenen Kreise und steht zugleich auf ihren Ebnen senkrecht (246). Da nun von c auf diese Ebnen nur ein einziges Perpendikel möglich ist (263), so geht 1) jedes Perpendikel, das aus dem Mittelpunkte der Kugel auf die Ebne eines solchen Kreises gezogen wird, durch dessen Mittelpunkt. 2) Ein Perpendikel auf die Ebne des Kreises in seinem Mittelpunkt, geht durch den Mittelpunkt der Kugel und 3) eine Linie aus dem Mittelpunkt der Kugel durch den Mittelpunkt des Kreises steht auf dessen Ebne senkrecht.

§. 331.

Zus. Indem sich cd, hf, ge, um die Axe bewegen, behalten die Punkte d, f, e, immer einerley Entfernungen von a und b, denn die Linien ad, af, ae, oder bd, bf, be, bleiben immer dieselben; also haben die Endpunkte der Axe von allen Punkten die in den Umkreisen der von cd, hf, ge, beschriebenen Kreise liegen, gleiche Ent-

fernung. Sie werden die **Pole** dieser Kreise genannt. Auch bleiben die Bogen ad, af 2c. rings um die Kugel einander gleich, (163), und deshalb sind die Bogen größter Kreise zwischen den Polen eines Kreises und einzelnen Punkten seines Umfangs, gleich.

§. 332.

Zus. Wenn ein Punkt a, b, von einem Kreise der Pol seyn soll, so muß ein Perpendikel von ihm auf die Ebne dieses Kreises durch dessen Mittelpunkt gehen, so wie hinwiederum ein Perpendikel auf der Ebne eines Kreises aus seinem Mittelpunkte, durch den Pol dieses Kreises geht (330).

§. 333.

Zus. Kreise, die mit den parallelen Halbmessern cd, hf 2c.. beschrieben sind, heißen **Parallelkreise**; diese haben also sämmtlich einerley Pole.

§. 334.

Anm. Wenn man an irgend einer andern Stelle der Kugel einen Schnitt wie ee, z. B. bd, annimmt, so kann man sich eine Parallele damit durch den Mittelpunkt c gedenken und ein Perpendikel aus demselben darauf fallen lassen, und es werden für ihn alle die bisherigen Schlüsse wieder gelten (135).

§. 335.

Lehrs. Eine gerade Linie bd trift die Oberfläche einer Kugel in nicht mehr als zwey Punkten.

Beweis. Man lege durch die gerade Linie und den Mittelpunkt der Kugel eine Ebne. Diese wird, in wiefern sie sich nicht weiter als bis an die Oberfläche der Kugel erstreckt und im Mittelpunkte durch eine gerade Linie begrenzt wird, einen Halbkreis mit welchem die Kugel beschrieben worden, vorstellen, und im Umfange desselben müssen die Punkte liegen, in welchen die Kugelfläche von der geraden Linie getroffen wird. Da nun eine gerade Linie einen Kreis nur in zwey Punkten schneiden kann (134), so ist die Behauptung des Satzes richtig.

§. 336.

Zus. Wenn die Peripherien zweyer Kreise einander schneiden, so muß es in den Endpunkten ihres gemeinschaftlichen Durchschnittes geschehen, da nun dieser Durchschnitt eine gerade Linie ist (249), so können auch zwey Kreise auf der Kugelfläche einander in nicht mehr als zweyen Punkten schneiden (335).

§. 337.

Zus. Wenn ein paar größte Kreise einander schneiden, so ist ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt

der Durchmesser der Kugel, indem ihre beyden Ebnen durch den Mittelpunkt der Kugel gehen (328); sie halbiren also einander beym schneiden. Und wenn hinwiederum ein paar Kreise einander halbiren, so haben sie einen gemeinschaftlichen Durchmesser und folglich einerley Mittelpunkt. Da nun nach (330) aus dem Mittelpunkte der Kugel auf die Ebne jedes Kreises durch seinen Mittelpunkt ein Perpendikel gezogen werden kann, so müßte dieses auf beyden sich schneidenden Kreisen senkrecht seyn, weil sie einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, dies widerspricht aber (263); also ist es nur in dem einzigen Falle möglich, daß Perpendikel auf die Ebnen der sich schneidenden Kreise durch ihren gemeinschaftlichen und zugleich durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, wenn dieser gemeinschaftliche Mittelpunkt mit dem der Kugel einerley ist. Kreise also die einander halbiren, müssen größte Kreise seyn.

§. 338.

Lehrs. Ein Kreis der durch die Pole eines andern geht, steht I. auf ihm senkrecht; II. halbirt jenen Kreis; III. ist ein größter Kreis.

Beweis. Für I. Die Ebne eines solchen Kreises wird durch die gerade Linie gehen, welche von einem Pol zum andern gezogen wird und die auf der Ebne des Kreises welchem die Pole zugehören, senkrech

senkrecht steht (332), sie ist also auf der Ebne dieses Kreises senkrecht (269).

Für II. Die gerade Linie zwischen den Polen geht auch durch den Mittelpunkt des Kreises welchem die Pole zugehören (332) folglich trift die Ebne des durch die Pole gehenden Kreises den Mittelpunkt desjenigen welchem die Pole zugehören, und also halbirt er ihn.

Für III. Die Linie zwischen den Polen geht auch durch den Mittelpunkt der Kugel (332. 330); also trift die Ebne des durch die Pole gehenden Kreises auch den Mittelpunkt der Kugel, und er ist deshalb ein größter Kreis (329).

§. 339.

Zus. Hinwiederum wird auch ein größter Kreis der auf einem andern größten oder kleinern senkrecht steht, durch die Pole desselben gehen und ihn halbiren, denn er kann nicht anders senkrecht auf ihm seyn, als daß er durch die gerade Linie zwischen den Polen geht (263), und wenn dies ist, so folgt die Behauptung wieder wie im Beweis zum vorhergehenden Lehrsatz. Ist nun der andere Kreis auch ein größter, so geht er ebenfalls durch die Pole des ersten und halbirt ihn.

§. 340.

Lehrs. **Wenn zwey größte Kreise** a δ b **und** a D b **durch die Pole** a, b **eines dritten gehen,**

so haben die zwischen ihnen liegenden Bogen der Parallelkreise, sämmtlich einerley Anzahl von Graden, oder sie sind einander ähnlich.

Beweis. Es giebt nemlich in beyden einerley Linien wie ε g, Φ h, δ c, welche aus Punkten die gleichen Abstand von a und b haben, auf einerley Punkte der a b, in g, h, c senkrecht sind; jedes Paar solcher Linien bildet den Neigungswinkel von den Ebnen der beyden größten Kreise (252). Die Maaße dieser gleichen Winkel sind aber die Bogen der Kreise welche mit dem im Satz genannten dritten parallel sind (28), also haben sie sämmtlich einerley Anzahl von Graden.

§. 341.

Zus. Wenn der im vorigen Satz erwehnte dritte Kreis ein größter ist, wie δ m d, so ist der Bogen a δ das Maas des rechten Winkels a c δ = 90°. Folglich ist der Bogen eines größten Kreises der zwischen einem Punkte der Peripherie eines andern größten Kreises und dem ihm zugehörigen Pole liegt, ein Quadrant.

§. 342.

Zus. Will man also den Neigungswinkel zweyer Kreise a δ b uud a D b durch Grade eines größten Kreises angeben, wie dieses am bequemsten, und deshalb gewöhnlich ist, so muß man in der Entfernung eines Quadranten von ihrem Durchschnittspunkte,

punkte, den Bogen des größten Kreises durch welchen man dieses Maaß ausdrücken will, zwischen sie legen, d. i. man muß dazu ein Stück des Kreises δ m d brauchen (340, 341).

§. 343.

Zus. Da die beyden Kreise a δ b und a D b durch die Linie a b gehen, welche auf dem Kreise δ m d senkrecht steht (330), so stehen auch diese Kreise selbst auf δ m d senkrecht, also steht das gebrauchte Maas, oder überhaupt ein größter Kreis, der durch die Endpunkte zweyer Quadranten größter Kreise geht, auf beyden Quadranten senkrecht und trift zugleich ihre Pole (339).

§. 344.

Zus. Soll also ein größter Kreis durch die Pole mehrerer anderer gehen, so muß er auf ihnen allen senkrecht stehen, und dies wird geschehen wenn man ihn auf ihren gemeinschaftlichen Durchschnitt senkrecht setzt (269).

§. 345.

Aufg. **Den Pol eines größten Kreises zu finden.**

Aufl. Man setze auf ihn einen andern größten senkrecht und schneide in demselben einen Quadranten ab, so ist der Endpunkt dieses Quadranten, der gesuchte Pol.

Beweis.

Beweis. Die Kreise aδb und aDb gingen nach (343) durch die Pole des Kreise δ m d, diese sind die Punkte a und b; da nun aδ ein Quadrant ist (341), so ist die Vorschrift richtig.

§. 346.

Zus. Wenn der Kreis a d b c Fig. 128. senkrecht auf den beyden andern a b und c d steht, so werden in ihm die Pole derselben liegen (345) und wenn p der Pol von a b und π der von c d, so wird $bp = 90^\circ$ und $d\pi = 90^\circ$ also $bp = d\pi$ und $bp - dp = d\pi - dp$ d. i. $bd = p\pi$ seyn. Die Entfernung der Pole zweyer größten Kreise die sich auf einerley Seite derselben befinden, beträgt also eben so viel als das Maas des spitzigen Neigungswinkels beyder Kreise. Da nun die zu einem Kreis gehörigen Pole um 180° von einander abstehen und der spitzige Neigungswinkel mit seinem stumpfen Nebenwinkel ebenfalls 180° macht, so wird der Abstand der Pole welche auf verschiedenen Seiten der Kreise liegen, dem Maas jenes stumpfen Nebenwinkels gleich seyn.

§. 347.

Lehrs. Der Inhalt einer Kugel verhält sich zum Inhalt eines Cylinders dessen Durchmesser und Höhe dem Durchmesser der Kugel gleich ist, wie 2 zu 3.

Beweis. Es sey a b c d Fig. 129. ein Quadrat, a e b ein Quadrant dessen Halbmesser die Seite des Qua=

Quadrats ist, und cad ein rechtwinklichtes Dreyeck dessen Grundlinie und Höhe ebenfalls Seiten jenes Quadrats sind. Man nehme an, daß sich diese drey Figuren um ac als eine Axe bewegen, so wird von der ersten ein Cylinder; von der zweiten eine halbe Kugel und von der dritten ein Kegel beschrieben, welche 3 Körper, sämmtlich einerley Grundfläche und Höhe haben.

Man ziehe eine Linie eh mit der Grundlinie des Dreyecks cd parallel, so wird ae : ef = ac : cd (183) und da ac = cd (44) so ist ae = ef, ag = ab (24) = eh (102).

Itzt gedenke man sich wieder wie in (284) eine Menge Elementarscheiben von gleicher Dicke zwischen ab und cd, von welchen eine über eh liege, so wird ef der Halbmesser einer zum Kegel; eg der Halbmesser einer zur Kugel; und eh selbst der Halbmesser einer zum Cylinder gehörigen solchen Scheibe seyn. In dem rechtwinklichten Dreyecke aeg ist nun $ag^2 - ae^2 = eg^2$ (132). Da nun ae = ef und ag = eh war, so wird auch $eh^2 - ef^2 = eg^2$, folglich auch der Kreis von eh — dem von ef = dem von eg (227) und endlich auch die Scheibe von eh — der von ef = der von eg seyn (289). Und weil diese Schlüsse von allen solchen Scheiben gelten, die man zwischen a und c annehmen kann, und die Summe aller derer von eh den Cylinder, derer von ef den Kegel, und derer von eg die halbe Kugel aus-macht,

macht, so wird, wenn man vom Inhalt des Cylinders den Inhalt des Kegels abzieht, der Inhalt der halben Kugel übrig bleiben. Und eben so wird der Inhalt der ganzen Kugel übrig bleiben, wenn man statt des vorigen Cylinders und Kegels andere nimmt, die bey gleicher Grundfläche, doppelte Höhe nemlich so viel, als der ganze Durchmesser der Kugel beträgt, haben, denn es ist alsdann ihr Inhalt ebenfalls verdoppelt worden (289). Nach (316) ist nun ein Kegel der gleiche Grundfläche und Höhe mit einem Cylinder hat, der dritte Theil von demselben, zieht man also diesen vom ganzen ab, so bleiben zwey Drittel übrig und da dieser Rest den Inhalt der Kugel giebt, so verhält sie sich zum Cylinder wie 2 zu 3.

§. 348.

Aufg. Aus dem gegebnen Durchmesser einer Kugel ihren Inhalt zu finden.

Aufl. Man berechne den Inhalt eines Cylinders dessen Durchmesser und Höhe dem Durchmesser der Kugel gleich ist (288) und nehme davon $\frac{2}{3}$, so wird man den Inhalt der Kugel erhalten.

Beweis. Er fließt unmittelbar aus (347). Es sey z. B. der gegebne Durchmesser $= 2^{\circ}$ so ist in (288) $r = 1^{\circ}$ also der Cylinder $= 3, 14 . . 1 . 2$ und die Kugel $\frac{2}{3} . 3, 14 . . 1 . 2 = 4, 186666 .$

§. 349.

Zus. Der Kubus des Durchmessers der Kugel ist $= 8\,r^3$ und der Inhalt der Kugel, durch r ausgedrückt $= \frac{2 \cdot 2 \cdot 3,1415 \ldots r^3}{3}$ diese beyden Ausdrücke verhalten sich zu einander, wenn man beyderseits mit $8\,r^3$ aufhebt, wie $1 : \frac{1,5707 \ldots}{3} = 3 : 1,57 \ldots$ Oder der Kubus des Durchmessers verhält sich zum Inhalt der Kugel, wie $1 : 0,5235 \ldots$ wo man statt der letzten Ziffer beynahe 6 annehmen, oder noch mehrere dazu suchen kann. Ist also der Durchmesser z. B. 12^{I} so ist sein Würfel $= 1728$ und der Inhalt der Kugel $= 1728 \cdot 0,5235 \ldots = 904$ Kub. Fuß 608 K. Zoll. Weil hier von den Ludolphischen Zahlen (180) ein paar mehr als im vorigen § gebraucht worden sind, so findet sich nach der gegenwärtigen Regel der Inhalt der Kugel deren Durchmesser $= 2^{0}$ ist, 4,188 .. welcher etwas genauer als jener ist.

§. 350.

Zus. Wenn die gegenwärtige Kugel K und der Kubus ihres Durchmessers C; eine andere Kugel aber k und der Kubus ihres Durchmessers c heißt, so ist.

$$\left.\begin{array}{l} K : C = 0,52 \ldots : 1 \\ \text{und } k : c = 0,52 \ldots : 1 \end{array}\right\} (349)$$

also $K : C = k : c$ (204. Ar.)

oder $K : k = C : c$ (231. II. Ar.)

 Das

Das heißt: die Kugeln verhalten sich zu einander wie die Würfel ihrer Durchmesser.

§. 351.

Lehrs. Die Kugel ist einer Pyramide gleich, deren Grundfläche so viel als die Kugelfläche und deren Höhe so viel als der Halbmesser der Kugel beträgt.

Beweis. Wenn man den Kreis nach (179) als ein Vieleck von unendlichen Seiten betrachtet, so wird man sich die Oberfläche der Kugel welche durch Herumdrehung der Hälfte eines solchen Kreises entstanden ist (326) als eine Menge unendlich schmaler Streifen vorstellen können, welche von jenen unendlich kleinen Seiten sind beschrieben worden. Stellt man sich nun die Beschreibung der Kugel noch einmal nach einer andern Richtung vor, so wird man wieder eine Menge solcher Streifen erhalten, welche die vorigen durchschneiden und dadurch auf der Oberfläche eine unendliche Menge unendlich kleiner Vierecke bilden, in welche die Oberfläche der Kugel ist zertheilt worden. Zieht man nun aus dem Mittelpunkte der Kugel in jeden Winkel dieser Vierecke, Halbmesser, so erhält man eben so viel Pyramiden als Flächen vorhanden sind, und wo die Höhe einer jeden nicht merklich vom Halbmesser der Kugel verschieden ist. Diese Pyramiden betragen dann zusammen so viel als eine einzige von eben der Höhe und von einer Grundfläche die allen jenen Grundflächen zusammen

mei

men, d. i. der Oberfläche der Kugel, gleich ist (316).

§. 352.

Zus. Wenn die Oberfläche der Kugel = b, der Halbmesser = r, und der Inhalt = k, so ist k = $\frac{rb}{3}$ (318) also b = $\frac{3k}{r}$. Drückt man k nach (348) durch $\frac{2.2r.3,14..r^2}{3}$ aus, so erhält man b = $\frac{3.2.2.3,14..r^3}{3r}$. Der größte Kreis der Kugel wird seyn = 3, 14.. r^2 (235. VII.) also verhält sich der größte Kreis der Kugel zur Oberfläche derselben wie 3, 14.. r^2 : $\frac{3.2.2.3,14..r^3}{3r}$ = 1 : 4.

§. 353.

Aufg. Aus dem gegebnen Halbmesser oder Durchmesser einer Kugel den Inhalt ihrer Oberfläche zu finden.

Aufl. Man suche den größten Kreis der Kugel nach (235 VII oder VIII) und multiplicire diesen Werth durch 4. so erhält man den Inhalt der Oberfläche.

Beweis. Er fließt unmittelbar aus (352) z. B. wenn r = 1° so ist die Oberfläche 4. 3, 14.. 1 = 12, 56 d. i. 12 Quadr. R. 56 Qu. Fuß.

§. 354.

Zus. Hiernach läßt sich der Inhalt der Kugel noch auf eine andere Art finden. Man sieht nemlich die vorhin gefundene Oberfläche der Kugel als die Grundfläche einer, der Kugel gleichen Pyramide an und multiplicirt dieselbe mit dem 3ten Theil des Halbmessers (318, 350), dieser Inhalt wird also $= \frac{1}{3}. 12, 56 = 4, 186666..$ wie in (348).

§. 355.

Zus. Nimmt man aus (352) $k = \frac{4. 3, 14.. r^3}{3}$ so wird $r^3 = \frac{3k}{4 \cdot 3, 14..} = 0,75. k. \frac{1}{3, 14..} = 0,$ $75. 0, 3183.. k$ (235. IV.) also $r = \sqrt[3]{(0,238725.. k)}$.

§. 356.

Aufg. Aus dem gegebnen Inhalt einer Kugel ihren Halbmesser zu finden.

Aufl. Man multiplicire ihn mit 0, 238725. und ziehe aus dem Product die Kubikwurzel, z. B. der Inhalt sey aus (345) $90\overset{I}{4}, 608..$ so ist $r = \sqrt[3]{21\overset{I}{5}, 95...}$ Die ganze Zahl vor dem Komma ist beynahe 216, und würde wirklich so viel betragen, wenn die gebrauchten Decimalbrüche vollständig gewesen wären. Aus 216 ist nun die K. Wurzel 6^{I}, als der verlangte Halbmesser.

Beweis. Er fließt unmittelbar aus (355).

Oder

Oder: Wenn man aus dem Inhalt der Kugel sogleich ihren Durchmesser verlangt, so sage man nach (349). Wenn der Inhalt 0, 5235.. so ist der Würfel des Durchmessers 1, wie viel wird er seyn, wenn der Inhalt z. B. 904ᴵ, 6080 ist? Aus der 4ten Proportionalzahl zieht man dann wieder die Kubikwurzel, so ergiebt sich der Durchmesser 12ᴵ.

§. 357.

Aufg. Den Inhalt eines einzelnen Kugelschnitts zu finden.

Aufl. Wenn man z. B. das Stück Fig. 129. zwischen c und e welches mit der über eg liegenden Ebne abgeschnitten ist, finden soll, so berechne man den Inhalt des Cylinders der eh zum Halbmesser, und ec zur Höhe hat; desgleichen auch den abgekürzten Kegel dessen Höhe = ec, und dessen beyde Halbmesser ef und cd wären, und ziehe diesen letztern Werth von jenem ab, so bleibt das Kugelstück übrig. Verlangte man das Kugelstück das zwischen zwey solchen Schnitten, wie das, wovon eg den Halbmesser vorstellt, enthalten ist, so müßte man zwey Kugelschnitte berechnen und das kleinere vom grössern abziehen.

Beweis. Er fließt mit aus (347).

§. 358.

Anm. Wenn man den Inhalt eines Körpers finden soll, der unter den bisher betrachteten nicht

mit begriffen ist, so läßt er sich vielleicht, wie z. B. Festungswerke, in dergleichen zerlegen, da man dann diese Stücke einzeln ausrechnet und sie hernach summirt. Besteht er aus einer gleichartigen Masse und läßt sich abwägen, wie z. B. ein metallenes Gefäs, so sucht man das Gewicht des ganzen Körpers und auch das von einem Kubikzoll ꝛc. der Materie, woraus der Körper besteht und sagt, wie das Gewicht 1 Kub. Zolls zum Gewicht des Körpers, so das Maas 1 K. Z. zum Maas des Körpers in Kub. Zollen. Läßt sich der Körper in ein rechtwinklichtes, hohles Parallelepipedum legen und mit Wasser oder Sand überschütten, so kann man erstlich die Größe des Körpers in Verbindung mit dem Wasser oder Sande, und hernach die Größe der Wasser- oder Sandmasse allein suchen, wo alsdann durch Abziehung des letztern, Werths vom erstern das Maas des Körpers übrig bleibt.

§. 359.

Anm. Soll man einen Körper der aus mehrern besonders gebildeten Theilen besteht, z. B. eine Bildsaule, eine Maschine, nach einer gewissen Verhältniß vergrössern oder verkleinern, so daß der neue Körper dem vorigen ähnlich wird, so muß man ohngefehr so verfahren wie in (296) bey Verfertigung des kubischen Visirstabes. Z. B. Man wollte die Länge und den Durchmesser eines Gliedes von einer Bildsäule wissen, die doppelt so groß als eine andere wäre die man vor sich hätte so mißt man die Länge und den Durchmesser der vor sich habenden auf einem beliebigen Maasstabe erhebt dieses Maas zur dritten Potenz, verdoppelt diese und zieht aus dem Duplum die Kubikwürzel diese wird auf eben dem Maasstabe, die Länge

ode

oder den Durchmesser des doppelt so großen Gliedes geben.

§. 360.

Anm. Die Figuren in welche sich die geometrischen Körper einschließen lassen, kann man nach gewissen Regeln auf Papier u. dergl. aneinander hängend verzeichnen und dann die Körper daraus zusammen legen. Man pflegt sie Netze zu nennen; von ihrer Verzeichnungsart kann mündlich etwas beygebracht werden.

Die ebne Trigonometrie.

§. 1.

Zu den Theilen eines auf der Ebne befindlichen Dreyecks, mit deren Berechnung sich nach (11. Einl.) die ebne Trigonometrie beschäftigt, gehören seine 3 Seiten und 3 Winkel. Drey von diesen Stücken worunter wenigstens eine Seite befindlich ist, bestimmen, nach dem, was in (60. Geom.) bemerkt worden ist, das ganze Dreyeck seiner Gestalt und Größe nach. Blos in dem einzigen Falle wo die drey Stücke aus 2 Seiten und einem nicht von ihnen eingeschlossenen Winkel bestehen, werden bisweilen Dreyecke bestimmt, die nicht congruiren; indessen sind doch in diesem Falle deren nur zweyerley möglich, die sich darinn von einander unterscheiden daß in dem einen der Winkel, welcher einer von den gegebnen Seiten entgegen steht, ein spitziger und in dem andern ein stumpfer ist, welcher mit jenem spitzigen 180 macht.

Es ist in (78, 79 Geom.) zwar bewiesen worden, daß in einem Dreyeck allemal ein Winkel grösser ist, als ein anderer wenn die ihm entgegenstehende Seite grösser ist als die dem andern entgegenstehende, und so hinwiederum; aber daß sich die Winkel genau wie die ihnen entgegen stehenden Seiten verhalten sollten, ist damit nicht gesagt worden. Man muß also, wenn man nach der Proportionsrechnung Winkel und Seiten auseinander berechnen will, sich nach gewissen Größen umsehen, die nicht allein statt der Winkel wirklich mit den Seiten durchgängig in Verhältniß stehen, sondern auch sogleich als bekannt anzusehen sind wenn die Winkel gegeben sind. Diese Größen sind unter dem Namen der trigonometrischen Hülfslinien und besonders unter den Namen der Sinusse, Tangenten und Secanten bekannt.

§. 2.

Erkl Wenn Fig 130, acd ein beliebiger Winkel und ad sein Maas ist, so heißt ein Perpendikel dp von dem Punkte wo das Maas in den einen Schenkel trift bis auf den andern Schenkel (oder wo es nöthig wäre, dessen Verlängerung), der Sinus des Bogens ad oder auch des ihm zugehörigen Winkels acd. Gleichergestalt ist auch eben diese dp der Sinus des Bogens db welcher mit ad 180° macht, oder des ihm zugehörigen Winkels dcb welcher der Nebenwinkel von acd. ist

§. 3.

Zus. Es gehört also jeder Sinus 2 Bogen und Winkeln zu, von welchen einer der Nebenwinkel des andern ist; und aus (135. Geom.) erhellet, daß jeder Sinus eines Bogens als die halbe Sehne des doppelten anzusehen ist. Wäre z. B. acd = 30°, so wäre dp der Hälfte des Halbmessers gleich (173. Geom.) oder wenn acd = 45°, so wird dp der halben Quadratwurzel aus dem doppelten Quadrat des Halbmessers gleich (127. Geom.)

§. 4.

Zus. Den halben Umkreis ahb kann man als den entgegengesetzten von aeb ansehen; die Bogen also die in dem obersten bejaht sind, werden in dem untersten verneint seyn. Verlängert man nun dc nach g, so ist qg der Sinus des Bogens aebg, dem qf oder dp gleich, aber entgegengesetzt. Verlängert man dp bis i, so ist pi der Sinus des Bogens debhi abermals dp gleich, und entgegengesetzt. Wenn also der Bogen so viel über 180° oder so viel unter 360° ist, als ad beträgt, so ist sein Sinus = — dp. Nennt man ae den ersten; eb den zweiten; bh den dritten und ha den vierten Quadranten, so kann man sagen, die Sinus sind in den ersten beyden Quadranten bejahend und in den letzten beyden verneinend.

§. 5.

Zus. Wenn ad bis zu einem Quadranten ae wächst, so wächst auch sein Sinus, so, daß er in e

dem Halbmesser ce gleich wird; wächst der Bogen noch weiter, so nimmt der Sinus wieder ab, so, daß er bey f, wo der Bogen um ef über einen Quadranten gewachsen ist, nur wieder so groß wird als er bey d, wo der Bogen eben so viel unter einen Quadranten ist, war. Bey b wo der Bogen 180° wird, verschwindet er gänzlich und wächst wieder bis h, wo der Bogen = 3 Quadranten, oder 270° ist, alsdann nimmt er wieder ab bis er in a, wo der Bogen 360° ist, zum zweitenmal o wird. Wenn man zum ganzen Umkreis aufs neue den Bogen ad setzt, so wird dp abermals der Sinus eines Bogens welcher um ad größer ist als ein ganzer Umkreis, und so geht dieses immer weiter fort.

§. 6.

Erkl. Wenn der Sinus dem Halbmesser gleich wird, so heißt er Sinus totus oder Radius weil er nie größer als dieser werden kann. Der Kürze wegen pflegt man ihn mit r zu bezeichnen. Alle andere Sinusse lassen sich deshalb als reine Brüche vom Sinus totus oder Radius ansehen.

§. 7.

Erkl. Ein Bogen oder Winkel der mit einem andern 90° macht, heißt die Ergänzung desselben. Z. B. de ist die Ergänzung von ad und der Sinus dk dieses Bogens de heißt der **Ergänzungssinus** (sinus complementi) oder auch

Cosinus

Cosinus von dem zu a d gehörigen. Daher pflegt man auch d p zum Unterschied, den Sinus rectus von a d zu nennen.

§. 8.

Zus. Weil bey p, c und k rechte Winkel sind, so ist d k = p c (93, 102. Ge.); also schneidet der Sinus allemal den Cosinus vom Halbmesser ab, das abgeschnittene Stück a p heißt der Quersinus von a d, oder der Pfeil (sin. versus s. sagitta) und p c $= \sqrt{(cd^2 - dp^2)}$ (132. Ge.) d. i. das Quadrat des Cosinus kommt heraus wenn man das Quadr. des Sinus vom Quadr. des Halbmessers abzieht. Wenn z. B. der Halbmesser 1, so ist Cosinus 30° oder Sin. 60° $= \sqrt{(1 - \frac{1}{4})} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Mit dem Sinus rectus ist also auch zugleich sein Cosinus und Quersinus gegeben.

§. 9.

Zus. Von dem stumpfen Winkel a c f = d c b. ist der Sinus f q = d p und der Cosinus c q = — p c indem er ihm entgegengesetzt ist. Vom Bogen a e b g ist der Cosinus abermals c q = — p c; von a e b g h i aber ist er wieder p c. Hieraus erhellet, daß der Cosinus eines stumpfen Winkels dem seines spitzigen Nebenwinkels zwar gleich, aber entgegengesetzt, d. i. verneinend ist, wenn jener bejahend angenommen wird. Ueberhaupt

haupt sind die Cosinus im 1sten und 4ten Quadranten bejahend, im 2ten und 3ten aber verneinend. Im ersten Quadr. nehmen sie ab, wenn die Winkel wachsen und verschwinden bey 90° gänzlich; im 2ten Quadr. wachsen sie, bis sie bey 180° = r werden; im dritten Quadr. nehmen sie wieder ab, und verschwinden, zum 2ten mal bey 270°; im 4ten nehmen sie wieder zu bis sie bey 360° zum 2ten mal = r werden.

§. 10.

Erkl. Ein Perpendikel am vom Ende des einen Schenkels eines Winkels acd wo sein Maaß, der Bogen ad in ihn trift, bis dahin wo es vom andern Schenkel (oder dessen Verlängerung) geschnitten wird, heißt die Tangente dieses Winkels oder des ihm zugehörigen Bogens und cm, als der die Tangente abschneidende Schenkel, heißt die **Secante** desselben.

§. 11.

Zus. Wenn d nach e zu rückt, so wächst die Tangente, in e selbst ist der andere Schenkel des Winkels ce mit der Tangente parallel und schneidet sie also nur in einer unendlichen Entfernung (96 Ge.). Man setzt deshalb die Tangente von 90° = ∞. Wird der Bogen über 90°, z. B. aef, so wird das Perpendikel unterwärts ac, in n vom verlängerten Schenkel fc geschnitten; die Tangente ist also jetzt verneint, und nimmt ab, wenn der

Bogen

Bogen zunimmt. Beym Bogen über 180° z. B. aebg wird wieder das erste Perpendikel vom rückwärts verlängerten Schenkel gc in m geschnitten, und die Tangente ist wieder bejaht, und wächst mit dem Bogen. Endlich ist sie von einem Bogen über 270° wie aebhi zum zweitenmal verneint, nemlich wieder an und abnehmend mit dem Bogen. Die Tangenten sind also im ersten und dritten Quadranten bejaht; im zweiten und vierten aber, verneint.

§. 12.

Zus. weil cp : pd = ca : am (183. Ge.) so ist am $= \frac{pd. ca}{cp}$ d. i. $\frac{r. \text{sin.}}{\text{cosin.}}$ = tang. für einen gewissen Bogen oder Winkel. Ist cp = pd so ist ca = am. Dieses geschieht wenn der Winkel 45° ist.

§. 13.

Zus. Eben so ist cp : cd = ca : cm also cm $= \frac{cd . ca}{cp}$ d. i. $\frac{r^2}{\text{cosin.}}$ = sec. Weil r^2 beständig beiahend bleibt (118. Ar.), so wird die Secante bejaht oder verneint, je nachdem der Cosinus bejaht oder verneint ist (119. Ar.), also in dem ersten und 4ten Quadranten bejaht, in dem 2ten und 3ten verneint, welches auch mit den Lagen derselben in der Figur zusammenstimmt. Uebrigens sieht man, daß die Secante auch aus (12. Ge.) gefunden werden kann, indem cm $= \sqrt{(ac^2 + am^2)}$

$+ am^2$). Z. B. bey dem Winkel von 45° ist di
Sec. $= \sqrt{2 r^2}$.

§. 14.

Erkl. Die Tangente und Secante welche einer Bogen oder Winkel zugehört, welcher die Er gänzung von einem andern ist, heißt in eben den Verstande Cotangente und Cosecante, (tangen s. secans complementi) wie in (7) der Cosinus z. B. el = cot. ad, und cl = cosec. ad.

§. 15.

Zus. Es ist wieder ck : kd = ce : el als $\frac{r. \text{cos.}}{\text{sin.}}$ = cot. oder da auch △ cam einerle Winkel mit △ cel hat, so ist am : ac = ce el d. i. $\frac{r^2}{\text{tang.}}$ = cot Es erhellet hier wieder au eben den Gründen die in (13 für die Secante an geführt wurden, daß die Cotangente bejaht ode verneint ist, je nachdem es die Tangente ist.

§. 16.

Zus. Auch ist ck : cd = ce : cl also $\frac{r^2}{\text{sin}}$ = cosec. folglich die Cosec. bejaht oder verneint je nachdem es der Sinus ist. Man sieht zugleich aus dem bisherigen, daß sich Cosinus, Quersi nus, Tangente, Cotangente, Secante und Cose cante eines Bogens durch Rechnung finden lassen, sobald nur der Sinus dieses Bogens bekannt ist, denn r wird alsdann ebenfalls bekannt seyn,

wei

weil der Sinus als ein Bruch desselben angesehen wird (6).

§. 17.

Lehrs. Die zu einem nach Graden bestimmten Bogen gehörigen Sinusse, Tangenten, Secanten, bleiben bey jedem angenommenen Halbmesser sowohl unter sich als gegen den Halbmesser, in einerley Verhältniß.

Beweis. Es sey Fig. 131. sowohl a d als $\alpha\delta$ das Maas des Winkels c, so haben diese beyden Bogen einerley Anzahl von Graden (28 Ge.). Der erstere ist mit dem Halbmesser a c und der letztere mit α c beschrieben. Sinus und Tangente vom erstern sind b d, a e; und vom letztern $\beta\delta$, $\alpha\varepsilon$; welche sämmtlich auf α c senkrecht stehen und folglich parallel sind. Die Secanten liegen von beyden in der Linie c ε. Nach (183. Ge.)

wird also $bd : \beta\delta = cd : c\delta = bc : \beta c$
desgleichen $ae : \alpha\varepsilon = ce : c\varepsilon = ac : \alpha c$
auch $cf : cg = fh : g\gamma = ch : c\gamma$

§. 18.

Zus. Theilt man also den Halbmesser c d in eine beliebige Anzahl von gleichen Theilen und weiß wie viel derselben auf den Sinus, oder die Tangente, Secante, des Bogens a d gehen, so werden eben so viel Theile auf den Sinus $\beta\delta$ des Bogens $\alpha\delta$ gehen, wenn man annimmt, daß nun der Halbmesser

c δ

$c\delta$ in eben so viele gleiche Theile wie vorhin cd sey getheilt worden. Z. B. wenn cd in 10 gleich Theile getheilt wäre, so würde, wenn ad = 30°, der Sinus bd, 5 solcher Theile betragen (3): und eben so würde, wenn nun $c\delta$ in 10 gleich Theile getheilt worden, der Sinus $\beta\delta$ wieder 5 von diesen letztern Theilen enthalten, die sich also von den vorigen blos der Größe, aber nicht der Zahl nach, unterscheiden, und eben diese Bewandtniß hat es auch mit allen andern trigonometrischen Linien und mit jedem angenommenen Halbmesser; also sobald nur die Grade eines Winkels bestimmt sind, sobald sind auch die Theile des Halbmessers der Zahl nach bestimmt, die auf seinen Sinus ꝛc. gehen.

§. 19.

Lehrs. In jedem Dreyeck abd Fig. 132. verhalten sich die Seiten wie die Sinus der ihnen entgegenstehenden Winkel.

Beweis. Man beschreibe durch die drey Spitzen desselben einen Kreis (137. Ge.). Aus dem Mittelpunkte desselben c lasse man auf eine Seite z. B. ab das Perpendikel ce fallen, dies wird sie und den Bogen afb halbiren (135. Ge.), und ae wird der Sinus des Bogens af oder des Winkels acf seyn (2). Da nun der Winkel adb = ac (157. Ge.), so wird ae = ½ ab, auch der Sinus von adb, welcher der Seite ab entgegen steht, seyn.

Aus

Auf ähnliche Art zeigt sich daß $\frac{1}{2}$ ad = sin. abd und $\frac{1}{2}$ bd = sin. bad ist. Nun kann man setzen ab : ad = $\frac{1}{2}$ ab : $\frac{1}{2}$ ad (203. Ar.) d. i. die eine Seite zur andern, wie der Sinus des Winkels der jener entgegen steht zum Sinus dessen der dieser entgegen steht.

§. 20.

Anm. Da man die Sinus als halbe Sehnen eines Bogens ansehen kann (3), so läßt sich aus (178. Ge.) einsehen, wie wenigstens die Sinus einiger Bögen fur einen angenommenen Halbmesser, durch Rechnung gefunden werden konnen. Z. B. aus dem sin. 30° = $\frac{1}{2}$ r, der von 15, von $7\frac{1}{2}$ u. s. w. aber zur Berechnung des Sinus für jeden Bogen reicht die dortige Auflösung nicht zu. Die Art wie dieses geschieht, ist theils zu weitläuftig, theils zu schwer als daß sie hier gelehrt werden könnte. Schriften worinn dieses geschehen ist, hat Hr. Hofr. Kästner im 2ten Satz seiner ebnen Trigon. angeführt, und zugleich eine Reihe anderer wichtiger Bemerkungen mit beygebracht. Weil nur der einzige Sinus von 30° durch eine endliche Menge von Theilen des Halbmessers ausgedrückt werden kann, so hat man den Halbmesser in sehr viele, Z. B. 10 000 000 000 Theile getheilt, damit wenn noch ein Stück von einem solchen Theilchen nicht mit angegeben wird, dieser Fehler für nichts gehalten werden könne. Da nun auf solche Weise die Sinus, Tangenten rc. sehr große Zahlen werden, so hat man zugleich die Logarithmen für sie mit berechnet und beyde in besondere Tafeln nebeneinander gesetzt; die leztern pflegt man auch

die künstlichen Sinus ꝛc. und die erstern die natürlichen, zu nennen. In den gewöhnlichen Tafeln sind die natürlichen Sinus nur für den Halbmesser 10 000 000 angegeben und haben deshalb drey Decimalziffern weniger als die in größern Tafeln. Die Logarithmen welche man unverändert beybehalten hat, sind zwar nun für diese Zahlen zu groß, allein da man sie bey trigonometrischen Rechnungen für die Sinus ꝛc. selbst, und nicht für die bestimmten Decimaltheile des Halbmessers in welchen sie ausgedrückt sind, braucht, so bringt dieses keinen Nachtheil sondern es wird vielmehr die Rechnung noch genauer als wenn man sie mit Logarithmen führte welche für die nur bis auf 7 Stellen angegebnen Sinus ꝛc. wären berechnet worden.

§. 21.

Anm. Um Sinus und Cosinus ꝛc. nebst den ihnen zugehörigen Graden in einer Linie beysammmen zu haben, hat man die Tafeln so eingerichtet, daß die Grade der Winkel nur bis 45° vorwärts und alsdann wieder rückwärts gehen. Wenn die trigonometrischen Linien ihrer Lagen wegen verneint werden, so braucht man für sie eben die Logarithmen, als wenn sie bejaht wären; denn eigentliche Logarithmen für verneinte Größen sind deswegen nicht möglich, weil alle Arten von Zahlen, die man kennt, schon als Logarithmen bejahter Größen zu betrachten sind.

§. 22.

Aufg. Aus einer Seite ab und 2 Winkeln a und b eines Dreyecks abd Fig. 133. die übrigen Seiten zu finden.

Aufl

Aufl. Man suche den Winkel d welcher der gegebnen Seite entgegen steht (113 Ge.), und setze alsdann: sin. d : sin. a = ab : bd
ferner sin. d : sin. b = ab : ad.

Beweis. Sobald man die beyden Winkel z. B. d und a weiß, so sind auch aus den Tafeln die halben Seiten ab und bd die ihnen entgegen stehen, in solchen Theilen bekannt, als man für den Halbmesser des Kreises worin sich das △ beschreiben läßt, angenommen hat. Ist nun eine von diesen beyden Seiten, wie hier ab, auch noch in andern Theilen z. B. in Ruthen, Fussen ꝛc. bekannt, so wird die andere bd nach (17) um so viel mal mehr oder weniger Ruthen ꝛc. haben als ab, um wie viel ihre Hälfte, in Theilen des Halbmessers mehr oder weniger als die halbe ab betragen hat.

Es sey z. B. ab = 12′ ; a = 80 : b = 60°,
also d = 40°
so ist log. ab = 1. 0791812
log. sin. a = 9. 9933515

11. 0725327
log. sin. d = 9. 8080675

log. bd = 1. 2644652 gehört zu 18′.

§. 23.

Zus. Von 18 ist der Log. eigentlich 1. 2552725; also kleiner als der von bd; der von 19 aber ist 1. 2787536 und mithin größer als der von bd, folglich gehört zu 18 noch ein Decimalbruch, den man findet, wenn man nach (268, 273. Nr verfährt. Nämlich wenn man Log bd unter der Kennziffer 4 aufsucht, so steht bey dem Logar. welchem er am nächsten kommt die Zahl 18385 diese muß, weil man die Kennziffer um 2 Einheiten größer genommen hat, durch 100 dividirt werden, also ist bd = 18, 385. oder 1° 8' 3'' 8''' 5'''' .. zwar auch noch nicht völlig genau, aber doch der Wahrheit viel näher als 1° 8'.

§. 24.

Zus. Wenn bey a Fig. 134. ein rechter Winkel ist, so kann man mit bd den Bogen cd als das Maas des Winkels b beschreiben, und ad ist nun als sin. b, so wie bd als sin. tot. oder r anzusehen; dieses führt auf eine Methode, einen Winkel wie b, mittelst der Sinustafeln zu messen. Man theilt nemlich eine Linie nach der Art wie in (200 Ec.) in 1000 Theile, schneidet mit ihr auf dem einen Schenkel des zu messenden Winkels ein Stück wie bd ab, und läßt vom Endpunkt ein Perpendikel da auf den andern Schenkel fallen. Mißt man nun dieses auf jenem getheilten Maasstabe, so stellt das Maas den Sinus des Winkels

in Theilen eines Halbmessers von 1000 Theilen vor. Da nun in den gewöhnlichen Tafeln der Halbmesser in 10 000 000 Theilen angenommen worden (20), so denkt man sich die 4 letztern Ziffern rechter Hand in den Tafeln hinweg und sucht unter den stehendbleibenden diejenigen auf, welche dem gemessenen Perpendikel zugehören, die Grade, Minuten 2c. die in den Tafeln neben demselben stehen, geben alsdann das Maaß des Winkels an. Z B man fände da = 866 so wäre b = 60°. Auf ähnliche Art könnte man d finden, wenn man das Perpendickel b a mäße; allein weil dies den cosin. b vorstellt, so steht nach der Einrichtung der Tafeln (21) das Maas von d gleich neben dem von b, nemlich 30°.

§. 25.

Anm. Wenn man Tafeln braucht, wo die Sinus ausser den Graden auch noch für einzelne Minuten berechnet sind, so wird man finden, daß bey kleinen Winkeln die Ziffern die man aufsucht, zu etlichen hintereinander folgenden Minuten gehören, und daß dieses bey solchen die nahe an 90° sind, der Fall für eine beträchtliche Anzahl von Minuten wird. Wenn z. B a d = 998 wäre, so bleiben diese Ziffern für alle zwischen 86° 22' und 87° 27' liegende Winkel einerley; Man ist also bey dem Maaße von b bis auf 1° 5' ungewiß. In solchen Fällen sucht man also lieber das Maaß des kleinern Winkels d, wo diese Ungewißheit nicht so groß ist 2c. und aus ihm alsdann das von b welches seine Ergänzung zu 90° ist.

§. 26.

Anm. Wenn man b a statt b d als Halbmesser an nimmt, so wird a e das Maas von b und a nicht mehr der Sinus, sondern die Tangente vo b (10). Die Tafeln lehren, das für die Tangente die vorerwehnte Ungewißheit bey kleinen Winkel eben nicht beträchtlicher ist, als bey den Sinusse und bey größern Winkeln verschwindet sie völli Deshalb ist der Gebrauch der Tangenten zu Winkelmessen wirklich vortheilhafter; nur entste bey solchen die nahe an 90° kommen, die Unb quemlichkeit, daß die Tangenten so große Linie werden, daß sie sich nicht gut ziehen und messe lassen; man kann sich aber alsdann wieder d durch helfen, daß man die Cotangenten nimm und zu den ihnen angehörigen Winkeln die E gänzungen zu 90° sucht. Z. B. die Ziffern z Tangente von 86° 22′ sind 15748 also ist d Tangente fast 16mal länger als der gebrauch 1000 theilige Maasstab oder Halbmesser b a aber diese Zahl gehört auch weder 86° 21′, no 86° 23′. Brauchte man die Cotangente, so w ren die ihr zugehörigen Ziffern 63; allein diese g hören auch zu cot. 86° 21′ und 86° 23′, also h man hier zwar eine Ungewißheit von 3′ aber au eine so kleine Linie, daß sie bey weitem noch ni die Länge des Halbmessers erreicht.

§. 27.

Zus. Durch ein umgekehrtes Verfahren ka man auch einen in Graden gegebnen Winkel oh Transporteur verzeichnen. Z. B. man sollte in an b c einen Winkel von 40° legen, so nimmt m die ersten Ziffern des cosin. 40° = 766 und tr

sie in b a, errichtet in a ein Perpendikel und trägt darauf die ersten Ziffern des sin. 40° = 643, so erhält man a d, und es läßt sich nun d b ziehen. Oder man trägt den 1000 theilichten Maasstab auf b c, so daß a b = 1000 wird, errichtet wieder ein Perpendikel in a, und giebt a d so viel Theile als die Tangente des Winkels von 40° enthält, nemlich 839, so läßt sich wieder d b ziehen. Wäre der Winkel b über 45°, z. B. 50°, so setzte man b f = 1000, senkrecht auf a b und f g = cotang. 50° wieder senkrecht auf b f, so läßt sich g b ziehen. Sind die Winkel stumpf, so verzeichnet man ihre spitzigen Nebenwinkel und verlängert den einen Schenkel derselben.

§. 28.

Zus. Wenn in diesem rechtwinklichten Drevecke ausser dem rechten Winkel a noch ein schiefer b und einer von den Katheten a b gegeben ist, so ist d die Ergänzung von b, folglich sin. d = cos. b, und man findet den andern Katheten auf folgende Art

I. cos. b : sin. b = a b : a d

bequemer aber so:

II. r : tang. b = a b : a d denn da der sin. tot. oder r und sein Logar. blos aus einer 1 mit anhängenden Nullen besteht, so ist allemal die Rechnung bequemer, wenn r mit vorkommt.

 Sollte

Sollte aus jenen gegebnen Stücken die Hypothenuse gefunden werden, so hätte man

III. Cos. b : r = ab : bd

IV. oder r : sec. b = ab : bd

Da man aber die Secanten selten in den Tafeln findet, und ihre Logarithmen noch seltner, so ist die erstere Proportion brauchbarer als die letztere.

Wäre die Hypothenuse und ein schiefer Winkel b gegeben, und man sollte die Katheten finden, so hätte man

V. r : sin. b = bd : ad

VI. und r : cosin. b = bd : ab

§. 29.

Aufg. Aus 2 Seiten eines △ ad und db Fig. 133. und einem nicht von denselben eingeschlossenen Winkel a die übrigen Winkel und die dritte Seite zu finden.

Aufl. Man setze:

db : ad = sin. a : sin. b. Sobald b gefunden ist, läßt sich der dritte Winkel adb nach (113. Ge.) und die dritte Seite nach (22) finden.

Beweis. Er ist dem zu (22) völlig ähnlich. Es sey ad = 16′; db = 12′; a = 40° so hat man

 log.

og. sin. a = 9. 8080675
log. ad = 1. 2041200

11. 0121875
log. bd = 1. 0791812

og. sin. b = 9. 9330063 Dieser ist etwas grösser als log. 58° 59′, denn dieser ist = 9. 9329897 und der von 59° 0′ = 9. 9330656, und der Unterschied zwischen beyden 759. Der Unterschied zwischen dem von 58° 59′ und dem gefundenen ist = 166. Verfährt man also nach 271. Ar.) so findet man wie viel zu 58° 59′ noch Sekunden kommen. Es ist 58° 59′ und 59° 0′ um 1′ oder 60″ unterschieden, also kann man setzen 759 : 166 = 60″ zu den verlangten Sekunden; der Betrag derselben ist etwas über 13 also wäre der gesuchte Winkel 58° 59′ 13″..

§. 30.

Zus. Wenn ad > db, so wird man auch b grösser als a finden (78. Geom.). Läßt man von d ein Perpendikel dc auf ab oder deren Verlängerung fallen und nimmt cβ = cb, so wird dβc = b (84. Geom.) und dβ wird auf eben derselben Seite von a liegen auf welcher db liegt, weil sonst dβc nicht grösser als a seyn könnte. Alsdann aber ist dβ = db (55. Ge.). Dies ist der Fall wenn das Perpendikel innerhalb des Dreyecks fällt; fällt es ausserhalb desselben wie es geschehen würde, wenn adβ das in (29) betrachtete Dreyeck wäre,

 so

so nähme man c b = β c und erhielte wieder zwey völlig gleiche Seiten d β und d b, welche beyde auf einerley Seite von a lägen. In dem Fall also wo die gegebne Seite die einen Schenkel des gegebnen Winkels vorstellt, grösser ist als die, welche die= sem Winkel gegenüber steht; und diese letztere kein Perpendikel ist, giebt es allemal 2 verschiedene Dreyecke in deren jedem die gegebnen Stücke einer= ley sind, wo aber der gesuchte Winkel in dem einen ein spitziger und in dem andern dessen stumpfer Nebenwinkel ist; die Antwort welche die Auflösung giebt, ist also in diesem Fall zweydeutig, dies kann aber auch nicht befremdend seyn, weil si nicht den Winkel selbst, sondern nur seinen Sinu giebt, dieser aber nach (2) sowohl einem spitzige als dessen stumpfen Nebenwinkel zugehört. E würde also wenn man sich statt △ a b d, das ∠ a β d, vorstellte, der in (29) gefundene Winkel 18c — 58° 59′ 13″ = 121° 0′ 47″ seyn. Man mu also anders woher wissen ob man ein spitz= od stumpfwinklichtes Dreyeck vor sich hat.

§. 31.

Zus. Wenn a Fig. 134. ein rechter Winkel i so kann man a d als den Halbmesser ansehen u d b stellt alsdann die Secante von d, oder die Cos von b vor; also kann man setzen:

a d : d b = r : sec. d oder Cosec. b

Weg

Wegen dessen aber was wegen der Secanten in (28) bemerkt worden, ist die vorige Auflösung db : ad = r : sin. b oder Cos. d bequemer. Ausserdem läßt sich hier aus 2 Seiten die dritte auch nach (127. Ge.) finden.

§. 32.

Lehrs. Wenn von zweyen Größen die Summe und der Unterschied gegeben ist, so findet man I. die grössere, wenn man den halben Unterschied zur halben Summe addirt. II. Die kleinere, wenn man ihn davon abzieht. III. Den halben Unterschied, wenn man die kleinere von der halben Summe abzieht.

Beweis. Für I. Es sey die grössere = x die kleinere = y die Summe = ſ und der Unterschied = d,

so ist $x + y = ſ$
und $x - y = d$ man addire beyderseits

$$\left.\begin{aligned} 2x &= ſ + d \\ \text{also } x &= \tfrac{1}{2}ſ + \tfrac{1}{2}d \end{aligned}\right\} \text{(49, 128. Ar).}$$

Für II. Man subtrahire

von $x + y = ſ$
$x - y = d$

so kommt $2y = ſ - d$
also $y = \tfrac{1}{2}ſ - \tfrac{1}{2}d$

Für III. Man addire in der letzten Formel beyderseits $\tfrac{1}{2}$ d und subtrahire y, so kommt $\tfrac{1}{2}d =$
$\tfrac{1}{2}ſ$

$\frac{3}{2}$ s — y. Es sey z. B. s = 20; d = 6, so ist x = 13; y = 7 und 10 — 7 = 3 = $\frac{1}{2}$ d.

§. 33.

Lehrs. In jedem △ abc Fig. 135. verhält sich die Summe zweyer Seiten ac, ab, zu ihrem Unterschiede, wie die Tangente der halben Summe der Winkel c, b, welche von jenen Seiten nicht eingeschlossen sind, zur Tangente des halben Unterschieds derselben.

Beweis. Man verlängere die grössere Seite ab bis af = ac wird und mache auch ad = ac, so ist fb die Summe und db der Unterschied der beyden Seiten; fac ist die Summe der Winkel acb und abc (109. Ge.). Zieht man nun cd, so erhält man die Winkel acd und adc welche einander gleich sind (53. Geom.) und zusammen ebenfalls so viel als fac betragen. Es ist also adc als die halbe Summe der im Satz erwehnten Winkel anzusehen. Zieht man ferner eb durch b. parallel mit cd, so ist dbe = adc (101 Geom.) mithin ebenfalls jener halben Summe der Winkel gleich. Nun ist abc der kleinere von den beyden Winkeln (78. Ge.) folglich dbe — ab = cbe. den halben Unterschied der im Satz erwehnten Winkel (32 III.).

Sieht man ad, ac, af als drey Halbmesser eines Kreises an, so läßt sich damit über fd aus a ein Halbkreis beschreiben, der durch c geht

Ma

Man ziehe nun fe, durch c, so wird fcd = 90° (158. Ge.) und feb gleichfalls (101 Geom.). Man kann also mit be einen Bogen beschreiben, welcher das Maas der Winkel cbe und dbe vorstellt und ec wird die Tangente des erstern, fe aber die des letztern seyn (10).

Es ist nun nach (184. Ge.) fb : db = fe : ce d. i. so, wie es der Satz vorträgt.

§. 34.

Aufg. Aus 2 Seiten ab, ac eines schiefwinklichten und ungleichseitigen Dreyecks abc und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel, die übrigen Winkel und die dritte Seite zu finden.

Aufl. Man suche die Summe der übrigen Winkel nach (1.. Geom.) und den halben Unterschied derselben nach (33); hieraus ferner den größern und kleinern nach (32. I. II.) so wird sich die dritte Seite nach (22) finden lassen.

Beweis. Er beruht auf den angeführten §§. Z. B. ab = 16′ ac = 10′; a = 50° so ist c + b = 130° und $\frac{1}{2}$ (c + b) = 65°. Ferner

16 + 10 : 16 — 10 = tang. 65° : tang. $\frac{1}{2}$ (c — b)

log.

$$\log.\ 6 = 0.7781512$$
$$\log.\ \text{tang}.\ 65^\circ = 10.3313275$$
$$11.1094787$$
$$\log.\ 26 = 1.4149733$$

log. tang. $\frac{1}{2}(c - b)$ 9.6945054 gehört zu $26^\circ\ 19' +$.. Verfährt man wieder wie am Ende von (29) so findet man noch $48''$.. Also ist $c = 65^\circ + 26^\circ\ 19'\ 48''.. = 91^\circ\ 19'\ 48''..$ und $b = 38^\circ\ 40'\ 11''..$ Und nun kann man setzen:

sin. $91^\circ\ 19'\ 48''$.. oder nach (2)
sin. $88^\circ\ 40'\ 11''$.. : sin. $50^\circ = 16'$: bc

$$\log.\ \sin.\ 50^\circ = 9.8842540$$
$$\log.\ 16 = 1.2041200$$
$$11.0883740$$
$$\log.\ 88^\circ\ 40'\ 11''.. = 9.9998829$$
$$1.0884911$$ gehört,

unter der Kennziffer 4 aufgesucht, zu $12'$, 260
Oder auch: sin. $38^\circ 40'\ 11''$: sin. $50^\circ = 10'$: bc

$$\log.\ \sin.\ 50^\circ = 9.8842540$$
$$\log.\ 10 = 1.0000000$$
$$10.8842540$$
$$\log.\ \sin.\ 38^\circ\ 40'\ 11'' = 9.7957620$$
$$1.0884920$$ welcher

ebenfalls zu $12'$, 260 gehört.

§. 35.

Anm. Wenn die Tafeln nur Minuten enthalten, so findet man den Log. des Sinus bis auf die Sekun-

Sekunden durch ein ähnliches Verfahren wie in (270. Nr.). Nemlich log. sin. 88° 41′ = 9. 9998853 und log. sin 88° 40′ = 9. 999 8824. Der Unterschied zwischen den Winkeln ist 1′ oder 60″ und der Unterschied zwischen den Logarithmen 29. Um also den Unterschied zwischen den Logarithmen von 88° 40′ und 88° 40′ 11″ zu haben, setze man 60″ : 11″ = 29 : zu den ges. man findet 5.. Diese also zum Log. 88° 40′ addirt, giebt für 88° 40′ 11″ den log. 9. 9998829.

§. 36.

Anm. Von noch einer andern Auflösung dieser Aufgabe hat Hr. Hofr. Kästner bey dem 15ten Satz seiner ebnen Trig. Nachricht gegeben, wo man aber S. 474. Z. 10. BG, statt BC, lesen muß.

§. 37.

Zus. Wenn a ein rechter Winkel ist, so findet man mittelst der Tangente die beyden andern Winkel leichter. Es ist nemlich Fig. 134.

ab : ad = r : tang. b oder Cotang. d. Die dritte Seite findet sich dann aus (22. 29), auch aus (127. Ge.).

§. 38.

Anm. Wenn das Dreyeck gleichschenklicht ist, so lassen sich aus a die übrigen Winkel nach (112. Ge.) finden.

§. 39.

Aufg. Aus allen 3 Seiten eines ungleichseitigen Dreyecks abc Fig. 136. die Winkel zu finden.

Aufl.

Aufl. Man lasse auf die größte Seite ein Perpendikel c d von der Spitze c herab, so erhält man das rechtwinklichte △ c d b, in welchem d und c b bekannt ist, so daß man nur noch d b zu wissen nöthig hat, um den Winkel d b c und die übrigen zu finden.

Man beschreibe mit der kleinsten Seite c b einen Kreis, so wird g b = a b — a g, eine Sehne, und d b die Hälfte derselben seyn (135. Ge.). Da nun a b bekannt ist, so ist nur noch a g zu finden und dies geschieht, wenn man setzt: Wie sich verhält die größte Seite zur Summe der mittlern und kleinsten, so verhält sich der Unterschied zwischen der mittlern und kleinsten zum gesuchten Stück a g.

Beweis. Man verlängere a c bis an den Umkreis in e und ziehe e b; f g, so ist f g b + a g f = 180° (30. Geom.) und f g b + f e b = 180° (161. Geom.) folglich a g f = f e b. Da nun a den △ a f g und a e b gemein ist, so ist nach (186. Ge.)

a b : a e = a f : a g wo a e = a c + c b und a f = a c — c b indem f c, c e, c b lauter Halbmesser sind.

Es sey a b = 16'; a c = 14'; c b = 10 so hat man 16 : 24 = 4 : 6 also g b = 10 und d b = 5.

Ferne

Ferner cb : db = r : sin. dcb oder Cosin. dbc.

log. 5 = 0. 6989700
log. 1 = 10. 0000000
10. 6989700
log. 10 = 1. 0000000
9. 6989700 giebt dcb 30°.

und dbc, 60° und nun:

ac : cb = sin. abc : sin. a

log. 10 = 1. 0000000
log. sin. 60° = 9. 9375306
10. 9375306
log. 14 = 1. 1461280
9. 7914026 gehört zu

38° 12'. . Den dritten Winkel findet man nach (113. Se.) 81° 47'. .

Da sich übrigens das △ adc auf ähnliche Art wie △ dcb berechnen läßt, so kann man die übrigen Winkel auch noch auf eine andere Art finden.

Man hat nemlich ad = ab — db = 11, also

ac : ad = r : sin. acd oder Cosin. a

log. 11 = 1. 0413927
log. r = 10. 0000000
11. 0413927
log. 14 = 1. 1461280
9. 8952647 giebt acd

51° 47'. . und a = 38° 12'. . also acb 81° 47'. .

§. 40.

Zus. Diese Rechnungen lassen sich in allgemeinen Formeln darstellen, deren man sich als leicht zu übersehender Regeln bedienen kann. Man drücke itzt die Seiten des △ durch dieselben Buchstaben aus, welche vorhin die ihnen entgegenstehenden Winkel bezeichneten, so daß cb = a; ac = b und ab = c wird; den Cosinus des Winkels abc, nenne man der Kürze wegen, β, und endlich das unbekannte Stück ag = x, so ist gb = c — x und db = $\frac{1}{2}$ (c — x).

Nun war in (39) c : a + b = b — a : x also $x = \frac{(a+b).(b-a)}{c} = \frac{b^2 - a^2}{c}$ (131. Nr.) Zieht man diesen Werth des x von c ab (135. Nr.) und halbirt die Differenz, so erhält man $\frac{1}{2}(c-x) = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} = db$.

Nun ist in der Figur cb : r = db : cos. abc d. i. wenn man die obigen Buchstaben substituirt, $\beta = r. \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2\,ac}$

Z. B. Wenn a = 10′; b = 14′ und c = 16′ so hat man $r. \frac{(256 + 100 - 196)}{2.\ 10.\ 16} = \frac{1600000000}{320}$ = 5000000 giebt den Winkel dcb, 30°, folglich abc, 60° wie vorhin. Wenn man einen verneinten Werth findet, so nimmt man von dem spitzigen Winkel dem der bejahte zugehört, den stumpfen Nebenwinkel.

§. 41.

Zus. Aus der vorigen Formel nach welcher man aus den 3 Seiten einen Winkel fand, läßt sich eine andere herleiten, nach welcher man aus 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die 3te Seite findet. Es war $\beta = r. \frac{c + a^2 - b^2}{2\ ac}$

Man dividire beyderseits durch $\frac{r}{2\ ac}$ so kommt, $\frac{2\ ac\beta}{r} = c^2 + a^2 - b^2$. Man addire beyderseits b^2 und subtrahire $\frac{2\ ac\beta}{r}$, so erhält man $b^2 = a^2 + c^2 - \frac{2\ ac\beta}{r}$ und $b = \sqrt{\left(a^2 + c^2 - \frac{2\ ac\beta}{r}\right)}$ Z. B. wenn die Buchstaben wieder die vorige Bedeutung haben, so ist $b = \sqrt{\left(100 + 256 - \frac{320.\ 5000000}{10000000}\right)} = 14$.

Wenn abc stumpf ist, so ist β verneint und die Formel verwandelt sich in folgende $b = \sqrt{\left(a^2 + c^2 + \frac{2\ ac\beta}{r}\right)}$.

§. 42.

Aufg. Aus den 3 Seiten eines Dreyecks seinen Inhalt zu finden.

Aufl. 1) Man addire die 3 Seiten.

2) Man halbire diese Summe und ziehe von der Hälfte jede Seite ab.

3) Diese 3 Differenzen, und jene halbe Summe multiplicire man durcheinander, und ziehe aus dem Product die Quadratwurzel, so giebt sie den Inhalt an. Z. B. das △ sey rechtwinklicht und der eine Kathete = 3'; der andere = 4', so ist die Hypothenuse = 5' (127. Ge.), also erhält man nach 1) 12; nach 2) 6, 3, 2, 1; nach 3) 36 und √ 36 = 6 □', den verlangten Inhalt.

Beweis. In Fig. 136. ist $\frac{cd.\ ab}{2}$ = dem Inhalt (214. Ge.) wenn nun die Buchstaben in (41) hier wieder gelten, so ist ab = c; man drücke also auch cd durch die Buchstaben aus mit welchen die Seiten sind bezeichnet worden. Nun ist $r : a = \sin.\ abc : cd$ also I) $cd = \frac{a.\ \sin\ abc}{r}$

(234 Ar.).

Nach (8) wird II) $(\sin.\ abc)^2 = r^2 - \beta^2$.

In (40) war $\beta = r.\ \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2\ ac}$

Man addire beyderseits r, so kommt

$$r + \beta = r.\ \frac{c^2 + a^2 - b^2 + 2\ ac}{2\ ac} \text{(135 Ar.)}$$

Wenn man in diesen Zehler mit a + b + c dividirt, so erhält man zum Quotienten a + c − b, und man kann nun setzen

$$r + \beta = r.\ \frac{(a + b + c)\ (a + c - b)}{2\ ac}$$

Eben

Eben so subtrahire man β und seinen Werth beyderseits von r, so erhält man

$$r - \beta = r. \frac{b^2 - a^2 - c^2 + 2\,ac}{2\,ac}$$

Wenn man hier wieder in den Zähler mit $a + b - c$ dividirt, so erhält man zum Quotienten $b + c - a$ also kann man setzen

$$r - \beta = r. \frac{(a + b - c)\,(b + c - a)}{2\,ac}$$

Nach (131, Nr.) ist $r^2 - \beta^2 = (r + \beta)\,(r - \beta)$ Wenn man nun statt der letztern Factoren, ihre Werthe setzt, so wird

$$r^2 - \beta^2 = r^2 \frac{(a + b + c)\,(a + c - b)\,(a + b - c)\,(b + c - a)}{4\,a^2\,c^2}$$

also aus (II) sin. a b c $= \frac{r}{2\,ac.}$ $\sqrt{((a + b + c)\,(a + c - b)\,(a + b - c)\,(b + c - a))}$ Setzt man diesen Werth in die Formel I) und hebt r und a gegen einander auf, so erhält man

$$c\,d = \frac{\sqrt{((a + b + c)\,(a + c - b)\,(a + b - c)\,(b + c - a))}}{2\,c}.$$

Dieses Perpendikel mit der Grundlinie $= \frac{1}{2}$ c multiplicirt, giebt also den Inhalt $=$

$$\frac{\sqrt{((a + b + c)\,(a + c - b)\,(a + b - c)\,(b + c - a))}}{4}.$$

Das Quadrat dieses Inhalts ist $= \frac{1}{16}.\ (a + b + c)\,(a + c - b)\,(a + b - c)\,(b + c - a)$, und eben dies kommt heraus wenn man den 1sten Factor

$\frac{1}{16}$, wegläßt und dafür jeden der übrigen mit $\frac{1}{2}$ multiplicirt. Zieht man nun von $\frac{1}{2}$ (a + b + c) = $\frac{1}{2}$ a + $\frac{1}{2}$ b + $\frac{1}{2}$ c eine Seite, z. B. b = $\frac{1}{2}$ b + $\frac{1}{2}$ b, ab, so bleibt $\frac{1}{2}$ a + $\frac{1}{2}$ c — $\frac{1}{2}$ b = $\frac{1}{2}$ (a + c — b) u. s. w. woraus die oben gegebene Regel folgt.

§. 43.

Anm. Mehrere Anwendungen der Buchstabenrechenkunst um Rechnungsformelm und allgemeine trigonometrische Lehrsätze zu finden, s. man in Hrn. Hofr. Kästn. Anfangsgr. d. ebnen Trig. und Hrn. Prof. Klugels analyt. Trigonometrie.

Die Geodäsie oder Feldmeßkunst.

§. 1.

Erkl. Unter der Feldmeßkunst versteht man diejenige Anwendung der bisher vorgetragenen Lehren, wodurch man nicht allein zugängliche, und unzugängliche Distanzen und Höhen ausmessen; sondern auch gewisse kleine Stücken der Erdfläche so auf das Papier verzeichnen lernt, daß die kleine Figur der auf der Erde selbst befindlichen großen, ähnlich wird.

§. 2.

Zus. Punkte und Linien bestimmt man auf der Erde durch eingesteckte Stäbe die auf der Ebne senkrecht stehen müssen, wenn man sie in derjenigen Höhe über der Erde brauchen will, in welcher sich

sich gewöhnlich unser Auge befindet. Zwey Stäbe werden allemal in gerader Linie stehen (10. Ge.); sollen aber 3 oder mehrere sich in derselben befinden, so muß der Stab welcher zunächst bey dem Auge steht, alle weiter von demselben entfernten, bedecken können. Dies gründet sich auf den optischen Satz, daß die Lichtstrahlen nach geraden Linien fortgehen. Es erhellet aber auch aus eben solchen optischen Gründen, daß man, um vor Fehlern sicher zu seyn, das Auge nicht zu nahe an den Stab halten, und die Lichtstralen nicht mehr für geradelinigt annehmen dürfe, wenn das durchsichtige Mittel durch welches sie fahren z. B. Luft, Wasser, Glas nicht allenthalben von gleicher Dichtigkeit, und dabey ihre Richtung auf Linien die in der Oberfläche dieser Mittel gezogen sind, nicht senkrecht ist.

§. 3.

Willk. Satz. Kleine Strecken auf der Erde drückt man wie in (200 Ge.) nach Ruthen, Fußen, Zollen, aus, nur daß hier, sowohl die Fuße ꝛc. fast an jedem Orte ihre besondere Größe haben, als auch die Ruthen bald diese, bald jene Menge derselben in sich enthalten, so ist z. B. der pariser Fuß größer als der rheinländische und zwar in der Verhältniß von 14400 zu 13913 (273 Ar.); und dieses ist der Fall bey mehrern, so daß man ganze Verzeichnisse von den Verhältnissen dieser Fußmaaße bey praktischen Schriftstellern findet. Eben so wird zuweilen

 die

die Ruthe in 18, 16, 14, 12 und 10 Fuß eingetheilt, so wie auch zuweilen die Toise oder Klafter, welche 6 Fuß enthält, beym Feldmessen gebraucht wird. Der Fuß wird wiederum bald in 10 bald in 12 Theile getheilt, und eben dies ist auch der Fall bey dem Zoll und der Linie. Wenn der Ruthen und Fuße zu viel werden, als daß man sich von der Länge der Linie die sie angeben, eine deutliche Vorstellung machen könnte, so pflegt man statt ihrer, Meilen zu brauchen, wo aber ebenfalls eine große Verschiedenheit statt findet. Am gebräuchlichsten sind bey uns die geographischen oder deutschen Meilen, auf deren jede man 23629 rhein. oder 22872 par. Fuß rechnet.

Beym Flächenmaaß hat man hier eben so wie oben in der Geom. Quadr. R. u. s. w. wo auch eine gewisse Anzahl derselben z. B. 120 oder 140, ein Acker oder Morgen Landes genannt wird.

§. 4.

Aufg. Decimalmaaß in Duodecimalmaaß, und umgekehrt, zu verwandeln.

Aufl. Weil beym Decimalmaaß einerley Länge z. B. 1 Ruthe in 10 und beym Duodecimalmaaß ebendieselbe in 12 gleiche Theile getheilt ist, so werden 10 Dec. F. = 12 Duod. F., und wenn man beyderseits durch 10 dividirt, 1 Dec. F. = 1, 2 Duod. F. Um also z. B. 8, 25 Dec. F. in

Duod. F. zu verwandeln, multiplicire man sie
it 1, 2; nemlich

$$\begin{array}{r} 8',25 \\ 1,2 \\ \hline 1650 \\ 825 \\ \hline 9,900 \end{array}$$

Man erhält also $9\frac{9}{10}$ Duod. F. Um die $\frac{9}{10}$ Duod.
. in Duod. Zolle zu verwandeln, verfährt man
ach (99. Ar.) d. i. man multiplicirt sie mit 12,
o man $10\frac{8}{10}$ Duod. Z. erhält, die $\frac{8}{10}''$ verwandelt
an auf ähnliche Art in 9, 6 Duod. Lin. Man
at also statt 8, 25 Dec. F. oder 8' 2" 5''' Dec.
Maas nun 9' 10" 9''', 6 Duod. M. Hätte man
", 25 zu verwandeln gehabt, so hätte man
" 10''', 9'''', 6 Duod. Maas erhalten.

Will man Duod. M. in Decimalmaaß verwan-
eln, so setze man wieder 10 Dec. F. = 12 Duod.
. und div. durch 12, so kommt $\frac{10}{12}$ Dec. F. = 1 Duod.
. oder 1 Duod. F. giebt 0, 8333.. Dec. F.
139. Ar.). Wenn man also 9, 9 Duod. Fuß
n Dec. Maas haben wollte, so müßte man sie
nit 0, 8 3 3 3.. multipliciren; nemlich

$$\begin{array}{r} 9',9 \\ \hline 74997 \\ 74997 \\ \hline 8,24967 \end{array}$$

Diese Zahl ist beynahe 8', 25,
und so viel würde sie auch wirklich betragen, wenn
der obere Factor vollständig gewesen wäre.

Beweis. Die ganze Rechnung beruht eigentlich auf der Regel Detri. Da nemlich 10 Dec. F. 12 Duod. F. betragen, so werden eine beliebige Anzahl derselben so viel betragen als das 4te Glied giebt; und das obige Verfahren ist eine bloße Abkürzung dieser Methode. Wenn statt des an den Fußen hängenden Bruchs wirkliche Zolle und Linien vorhanden wåren, so müßte man setzen: 100 Dec. Z geben 144 Duod. Z. wieviel die vorhandenen? oder 1000 Dec. Lin. geben 1728 Duod. Lin. wie viel z. B. 825 Dec. Lin.? und man fånde alsdann 1425, 6 Duod. Lin. = 9′ 10″, 9‴, 6 Duod. Maaß wie oben. Aehnliche Bewandtniß hat es auch mit der Verwandlung des Duod. Maaßes in Dec. M. Wenn nemlich 9′ 10″ 9‴, 6 zu verwandeln wåren, so müßte man nach (99. Ar.) alles auf die kleinste Sorte nemlich auf Linien bringen, und dann setzt man

1728 Duod. L. geben 1000 Dec. L. = 1425‴, 6? und man fånde 825 = 8′ 2″ 5‴ Dec. Maaß oder 8′, 25.

§. 5.

Zus. Beym Flåchenmaaß wird man sich aus (208. Ge.) erinnern, daß 1 Quadr. R. 100 Qu F. u. s. w. hat, also wird eine Duod. Quadr. R 12. 12 = 144 Qu. F. haben, und eben so 1 Qu F. 144 Qu. Z. haben, worauf man also bey der Verwandlung der Flåchenmaaße Rücksicht zu neh men

en hat. Eben so hat 1 Sechzehntheilige Qu. R.), 16 oder 256 Qu. Fuß u. s. w.

§. 6.

Anm. Wenn man ein Maas das nach einem gewissen Fuß z. B. dem pariser ausgedrückt ist, nach einem andern z. B. dem rheinländischen, angeben soll, so verfährt man wie in (273. Ar.) Diese Rechnung gehört eigentlich zur verkehrten Regel Detri; denn die Verhältnißzahlen der beyden Fuße werden nach Mengen gleich großer Theile die sowohl auf den einen als andern gehen, angegeben z. B. 1 pariser Fuß verhält sich zu 1 rheinl. wie 14400 : 13913, also sind 13913 par. F. = 14400 rhnl. Fuß (227. Ar.) daraus folgte (273. I. Ar.) daß 1 par. F. so viel als 1, 035 rheinl. F. betrage. Will man also wissen wie viel z. B. 20 par. F. an rheinl. betragen, so multiplicirt man jene Zahl mit 20, od r addirt zu ihrem

Logar. = 0. 0149417
den Log. 20 = 1, 3010300

so erhält man 1. 3159717 den Log. der gesuchten rheinl. Fuße, welcher zu 20, 7 gehört.

Umgekehrt fand man (273. II. Ar.) 1 rheinl. F. = 0, 9662 pariser; also um 20, 7 rhnl. F. in pariser zu verwandeln, multiplicirt man sie mit jener Zahl, oder addirt beyder Logar. zusammen.

So ist Log. 0, 9662 = 0. 9850583 — 1
und Log. 20,7 = 1. 3159717

1. 3010300 welcher zu 20 gehört. Wenn man blos multiplicirt, ohne

ohne die Logar. zu brauchen, so erhält man 20 00034 welches etwas mehr als 20 ist, weil di Decimalbrüche nicht ganz genau sind. Wäre nun diese gefundenen Fuße, Decimalfuße un man wollte ihren Werth in Duod. Maaß haben so müßte man sie nach (4) noch mit 1, 2 mul tipliciren u. s. w.

§. 7.

Aufg. Eine zugängliche gerade Linie au dem Felde zu messen.

Aufl. Man nehme eine Stange, Kette ode Schnur die in ihre Ruthen und Fuße getheilt is und bringe sie so waagrecht und gerade als mö lich, zwischen die Endpunkte der abgesteckten Lini so lassen sich die Ruthen und Fuße die sie enthäl abzählen. Findet sich am Ende noch ein Stück welches keinen ganzen Fuß beträgt, so untersuc man mit Hülfe eines einzelnen, nach Zollen un Linien abgetheilten Fußes, wie viel dieses Stü noch beträgt.

Beweis. Die waagrechte Richtung des Maa stabes ist deswegen erforderlich, weil man d Distanzen auf dem Felde, so zu haben wünsch wie sie sich auf einer völligen Horizontalebne z. B auf der Fläche eines stillen Wassers, ergeben wü den und die gerade Richtung ist dazu nöthig da man die Distanzen nicht zu groß erhalte, der wenn man den Maasstab in einer krummen od

gebroch

brochenen Linie brauchte, so würde man die istanz grösser finden, als sie wirklich ist.

§. 8.

Anm. Die Meßstangen haben in Absicht der Genauigkeit, die sie beym Messen gewähren, den Vorzug vor den Ketten und Schnuren. Wenn man sie von alten ausgelaugten Tannenholz verfertigt, so verändern sie sich nicht merklich, weder bey Kälte und Wärme wie die metallenen Ketten, noch bey Nässe und Trockenheit, wie die hanfenen Schnuren.

Um recht genau mit ihnen zu verfahren, kann man sie auf einem Stativ so befestigen daß sie sich um einen Punkt in vertikaler Richtung bewegen lassen; man kann sie an beyden Enden mit Dioptern, und in der Mitte mit einer Wasserwaage versehen, welche letztere aus einer genau cylindrischen Glasröhre besteht, die man bis auf einen kleinen Theil mit Wasser gefüllt und dann an beyden Enden verschlossen hat. Allein die Meßstangen haben den Nachtheil, daß sie bey einer beträchtlichen Länge sich biegen und nicht bequem zum handthieren sind; und bey einer nicht beträchtlichen zu oft von einer Stelle zur andern gebracht werden müssen, deswegen gehen auch die Operationen mit ihnen viel langsamer von statten, als mit den Ketten und Schnuren die man mit Ringen an Stäbe hängt und zwischen ihnen ausspannt. Das weitere was bey diesem Messen vorkommt, läßt sich besser zeigen als beschreiben.

§. 9.

Aufg. **Eine unzugängliche gerade Linie auf em Felde zu messen.**

Aufl.

Aufl. Man sehe die zu messende Linie als die Seite eines Dreyecks an und suche von demselben diejenigen Stücke in seine Gewalt zu bekommen, die zur Bestimmung jener unbekannten Seite erforderlich sind.

Diese Auflösung läßt sehr mannichfaltige Anwendungen zu, die hier nach der Reihe vorgenommen werden sollen.

I. Es sey die Weite AB Fig. 137. zu messen, wo man blos von C nach A und B kommen kann

1) Mit Stäben und der Kette. In dem △ ABC kann man CA und CB messen; man trag also diese Linien in gerader Richtung zurück nach Cb und Ca (2) so wird auch aCb = ACB (39 Geom.) also ab = AB (51. Geom.).

Wenn hinter c nicht Raum zum zurücktragen wäre, so könnte man auch blos die Hälften ode Drittel ꝛc. von den Linien nach β und α rückwärt oder auch vorwärts tragen, so wäre alsdann auc $\alpha\beta = \frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$ ꝛc. von AB (189. Ge.)

2) Mit dem Meßtische. Dieses Werkzeug wel ches in eignen von der ausübenden Geometrie han delnden Schriften, umständlich beschrieben wird kann man beym Gebrauch so weit kennen lerner als zu gegenwärtiger Absicht nöthig ist Man steck auf seinem waagrecht gestellten Blatte, senkrech über einem Punkt C, eine Nadel ein, leget ein L

nec

al mit Dioptern daran und visiret alsdann nach
n Gegenständen in A und B, wo man auch al-
nfalls Stäbe einstecken kann. Von den Gesichts-
ien lassen sich nun auf dem Tische die ersten
tücke vom angenommenen Punkt aus ziehen z. B.
α und Cβ. Mißt man nun CA und CB mit
m großen Maasstab und trägt die Maaße nach
m verjüngten (200. Ge.) in die auf dem Tische
findlichen Anfänge der Gesichtslinien, so erhält
an ein △ auf dem Tische, welches dem im Felde
nlich ist, und wo man αβ mit dem verjüngten
aasstabe messen, und versichert seyn kann, daß AB
f dem großen eben so viel halten werde (189. Ge.).

3) **Mit dem Winkelmesser.** Dieses Instrument
t viel Aehnlichkeit mit dem krummlinigten Trans-
rteur (169. Ge.) nur daß es wie der Meßtisch
f einem Stativ befestigt und mit Dioptern nebst
ier beweglichen Regel versehen, auch durch aller-
nd künstliche Einrichtungen zur Anzeige kleinerer
eile als ganze und halbe Grade sind, geschickt
nacht ist. Diesen Winkelmesser stellt man so
e den Meßtisch, waagrecht, mit seinem Mittel-
nkt über einen Punkt C; dreht ihn dann so,
ß man den Punkt A trift, wenn man über den
fangspunkt seiner Theilung hin visiret; alsdann
schiebt man die Regel bis man durch die Diop-
n den andern Punkt, B trift. Die Grade und
eile derselben nun, die zwischen dem Anfangs-
d letzterm Theilungspunkt welchen die Regel ab-
schnei-

schneidet, befindlich sind, geben das Maaß des Winkels ACB an; diesen trägt man dann auf ein Papier und in dessen Schenkel die wie in no. 2. gemessenen Linien, nach dem verjüngten Maasstabe, so erhält man abermals ein △ welches dem im Felde ähnlich ist, oder in Theilen des verjüngten Maasstabes die Größe der Seiten so angiebt, wie sie sich im Felde mit dem großen Maasstabe gemessen, finden würden.

Ausser dem beschriebenen Winkelmesser pflegt man auch mit der Boussole oder dem Kästchen mit der Magnetnadel, und andern, ehedem mehr, als heut zu Tage gebräuchlichen Werkzeugen, Winke im Freyen zu messen; es sind aber diese Metho den nicht so genau und allgemein, als die be schriebenen.

4) **Durch Rechnung.** Man messe nach no. 3 wieder den Winkel C und die Seiten AC un BC, so läßt sich (39. 40. Trig.) AB finden.

II. Eine Weite AB Fig. 138. zu messen, w man nur zu einem von ihren beyden Endpunkte aus einem dritten C, kommen, und nach de andern B, blos visiren kann.

1) **Mit Kette und Stäben.** Da man in der △ ABC die Seite AC messen, und den Winkel bestimmen kann, so trage man wie in I. 1. C in gerader Richtung nach Ca und A in a (9: Se.) indem man in v einen Stab setzt. Nu

nehm

ıehme man einen Stab und rücke ihn in der Li-
ıie BC immer weiter fort, bis man an eine
Stelle b kommt, wo ein hinter a befindliches
luge diesen Stab auch mit a und v in einer Li-
ıie sieht, so ist nun in den Dreyecken ABC und
bC, A = a; AC = Ca und ACB = bCa
olglich ab = AB (54. Ge.).

Wenn man von der gemessenen CA ein be-
anntes Stück Cα abschneidet, den Winkel A an
legt, und β in gerader Linie zwischen C und
3 setzt, daß man αβ messen kann, so darf man
ıach (186. Ge.) setzen Cα : αβ = CA : AB.

Ist DB die Breite eines Flusses die man fin-
den will, so kann man, wenn AB bekannt, und
AD unmittelbar zu messen ist, DB finden, wenn
nan AD von AB oder ab abzieht.

Da man A in den allermeisten Fällen auf ei-
ne beliebige Strecke von D wird abrücken kön-
nen, so läßt sich durch gegenwärtige Anleitung
allemal die Weite zweyer Oerter D und B finden
zu deren einem man nur aus einem dritten Orte
C, kommen kann.

2. **Mit dem Meßtisch.** Man setze ihn erst-
lich in C und ziehe darauf die Gesichtslinien Cα
und Cβ. Man messe CA und trage sie nach
dem verjüngten Maasstab auf Cα. Man setze
alsdann den Tisch in A so daß A senkrecht über
α und αC in die Richtung von AC kommt.

Endlich visire man aus A nach B, so läßt sich An auf dem Tische ziehen, diese wird nach dem verjüngten Maasstabe so viel als AB nach dem großen betragen, auch wird mn mit CB einerley Maas haben (186. Ge.).

3. **Mit dem Winkelmesser.** Man mißt damit die Winkel C und A desgleichen AC mit dem großen Maasstabe, so läßt sich wieder wie in I. 3. ein Dreyeck auf das Papier zeichnen, dessen Seiten nach dem verjüngten Maasstabe eben so viel halten, als die des großen nach dem größern Maasstabe (186. Ge.).

Es ist hiebey zu bemerken, daß es eben nicht unumgänglich nöthig ist, das Maas der Seite AC nach dem verjüngten Maasstab aufzutragen, denn die 2 Winkel bestimmen schon allein ein △ welches dem ACB ähnlich ist. Man könnte also auch die Seiten mA; An auf einem beliebigen Maasstabe messen, oder auch blos ihre Verhälnißzahlen suchen, und dann setzen mA : An = AC : AB oder Am : mn = AC : CB. Das Auftragen nach dem verjüngten Maasstabe ist aber bequemer als diese Rechnung und doppelte Messung.

4. **Durch Rechnung.** Aus den beyden Winkeln und der Seite AC, die man gemessen hat, findet man AB und CB nach (22. Trig.).

III. Wenn man weder zu A noch B kommen, nach beyden aber aus C visiren kann.

1) **Mit Stäben und der Kette.** Man suche die Weite von AC und CB nach II. 1. und verfahre dann nach I. 1.

Dieses Verfahren wird so, wie noch ein anderes mit bloßen Stäben, wegen seiner Weitläufigkeit und Unsicherheit, nur im Nothfall gebraucht.

2) **Mit dem rechtwinklichten Kreuz.** Fig. 139. Man setze das Instrument über einen Punkt D und visire von m nach A so, daß mA durch die beyden Absehen m, o, geht; man visire alsdann auch durch die Absehen n, p, und lasse durch einen Gehülfen in einiger Entfernung von p einen Stab in die Linie ns setzen. Man nehme hierauf das Instrument hinweg, setze an seine Stelle einen Stab in D und richte es auf der andern Seite bey E so, daß qs in die Linie der vorher eingesteckten Stäbe kömmt. In dieser Richtung schiebt man es so lange vor- oder rückwärts bis ein bey r visirender Gehülfe den Punkt B in rt erblickt. Itzt nimmt man auch hier das Instrument hinweg und setzt an seine Stelle einen Stab in E. DE theilt man nun in zwey gleiche Theile und setzt in das Mittel derselben einen Stab C. Nun nimmt man einen Stab in die Hand, geht von C immer rückwärts, so daß der Stab in der Linie CB bleibt,

 und

und wenn man so weit gekommen ist, daß ein Gehülfe diesen Stab auch mit D und A in einer Linie erblickt, so steckt man ihn fest in a. Wird nun auf der andern Seite eben so verfahren, so erhält man den Punkt b, wo alsdann ab so groß als AB seyn wird.

Wenn man blos die Weite von D nach A finden wollte, so fällt das Visiren nach B hinweg, und man kann E weiter vor- oder rückwärts von D annehmen, nur muß C allemal in die Mitte der Linie DE gesetzt werden.

Aus diesem Verfahren sieht man, daß das rechtwinklichte Kreutz auch gebraucht werden kann, wenn im Felde auf eine Linie ein Perpendikel soll gesetzt werden.

3) **Mit dem Meßtisch.** Fig. 140. Man messe eine Standlinie CD ab; setze den Tisch über C und nehme senkrecht darüber den Punkt c an. In D stecke man einen Stab und visire aus c nach demselben, so läßt sich cd ziehen und nach dem verjüngten Maasstab das Maas von CD darauf tragen. Man visire alsdann auch nach A und B, so erhält man die Linien cα, cβ. Nun nimmt man den Tisch hinweg, und setzt ihn an das andere Ende der Linie so, daß d senkrecht über D und dc in die Linie DC zu liegen kommt, und damit dieses bewerkstelliget werden könne, wird in C ein Stab gesetzt. Endlich visirt man aus d

wiede

wieder nach A und B, so ist die Entfernung der Durchschnittspunkte α und β nach dem verjüngten Maasstabe der zwischen A und B nach dem großen, gleich.

4) **Mit dem Winkelmesser.** Man mißt wieder wie vorhin eine Standlinie CD ab, und setzt den Winkelmesser in C und D, um auf der einen Seite die Winkel ACB, ACD, und auf der andern BDC, ADC zu erhalten, so läßt sich die Figur ABDC wieder wie in I. 3; II. 3. nach ähnlichen Abmessungen ins Kleine zeichnen.

5) **Durch Rechnung.** Aus den nach no. 4. gemessenen Stücken, läßt sich erstlich im △ ACD die Seite AC nach (22 Trig.) und dann nach eben der Aufgabe im △ BCD, die Seite BC finden. Aus diesen beyden und dem Winkel ACB sucht man endlich AB nach (34. 41 Trig.).

Man sieht von selbst, daß sich AB auch noch einmal auf ähnliche Art aus dem △ ABD berechnen läßt, wenn man vorher BD und AD gesucht hat.

Zu den Fällen in II. und III. lassen sich auch die Höhenmessungen rechnen; indem man bey einigen nur zum untern, bey andern zu keinem von beyden Endpunkten kommen kann. Indessen hat doch die Verfahrungsart etwas eigenthümliches; also

IV. Wenn die zu messende Linie eine Höhe ist, zu deren unterm Punkte man kommen kann.

1. Mit Stäben. Da sich das Zurücktragen der Linien nicht anbringen läßt, so muß man statt dessen eine Proportionsrechnung vornehmen, die indeß nicht trigonometrisch zu seyn braucht. Man stecke Fig. 141. einen Stab an senkrecht ein, und gehe mit einem kürzern om ebenfalls in senkrechter Richtung so weit zurück bis man die Punkte oaA in einer Linie erblickt. Man messe hierauf nm = do, wie auch den Unterschied der beyden Stäbe ad und die Entfernung des weitesten Stabes vom untersten Punkt der Höhe, Cm = Do und setze alsdann od : da = oD : DA. Hierzu addire man entweder noch om, wenn mc waagrecht ist, oder visire aus o noch einmal nach C, und lasse ein Zeichen an an so lange verschieben, bis man es in der Linie oC erblickt, da sich dann DC eben so wie DA berechnen läßt.

Andere ähnliche Arten z. B. mit Hülfe des Schattens, des geometrischen Quadrats und dergleichen, findet man bey praktischen Schriftstellern.

2. Mit dem Meßtisch. Fig. 142. Man stelle das Blatt desselben vertikal; erwähle einen Punkt o, und visire aus demselben nach A, und bey unebnem Boden, auch nach C. Man ziehe die waagrechte Linie od; messe mC und trage sie nach dem ver

jüngten

jüngten Maasstab in od. Durch d ziehe man endlich eine Perpendikularlinie auf od, so giebt ac das Maas von AC an.

Wenn mc waagrecht ist, so sucht man blos AD und addirt dazu om.

3. **Mit dem Winkelmesser.** Man stellt ihn ebenfalls vertikal, und mißt die Winkel AoD und DoC nebst mC, so läßt sich ein △ aoc verzeichnen welchem AoC ähnlich ist, und wo man an ac das Maas von AC haben kann.

4) **Durch trigonometr. Rechnung.** Aus den vorhin gemessenen Stücken läßt sich AD und DC nach (28. Trig.) finden.

V. **Wenn man auch zum untern Punkte nicht kommen kann.** Fig. 143.

1) **Mit Stäben.** Man setze ein paar Stäbe pq, kg, von ungleicher Länge senkrecht in q und g wie in Fig. 141, daß nemlich p, k und A in einer Linie liegen; alsdann bringe man in die Ebne pAD noch ein paar andere mn = pq und ac = kg, so daß wieder m, a und A in einer Linie liegen. Man messe hierauf qg, nc, qn, pq und kg, so kann man setzen

qg — nc : kg — pq = qn : AD wozu man alsdann noch pq addirt wenn qC waagrecht ist.

2) **Mit dem Meßtisch.** Fig. 144. Man richte den Meßtisch wieder so vor wie in (IV. 2.) messe eine Standlinie m n ab und trage sie in die auf dem Tische gezogene waagrechte Linie o d; visire hierauf nach A und C und ziehe o a, o c. Nun setze man den Tisch in n, so daß d senkrecht über n zu stehen kommt und visire aus d aufs neue nach A und C so kann man zwischen den Durchschnittspunkten a und c das Maas von A C erhalten.

3) **Mit dem Winkelmesser.** Nachdem man die Winkel bey o und d und die Standlinie m n gemessen hat, läßt sich die Figur a c o d verzeichnen in welcher man wieder wie vorhin a c erhält.

4) **Durch trigonometr. Rechnung.** Aus o d und den Winkeln A o D und A d o als dem Nebenwinkel von A d D findet man nach (22. Trig.) A d; und hierauf aus A d, dem Winkel A d D und dem rechten Winkel bey D nach (28. Trig.) A D. Auf ganz ähnliche Art auch unterwärts D C.

Beweis. In den mehresten Fällen ergiebt er sich aus den angeführten § § von selbst. Wenn bey dem Gebrauch des Meßtisches gesagt wird, die gesuchte unbekannte Linie im Felde betrage auf dem großen Maasstabe so viel Ruthen 2c. als die ähnliche Linie auf dem Meßtische, so gründet sich dieses auf die Aehnlichkeit der Dreyecke (190. Ge.).

Daß in (III. 2.) Fig. 139. a b = A B erhellet so: In den rechtwinklichten Dreyecken A D C und

CEb ist DC = CE n. d. Vorschr. D = E (33. Ge.) und DCA = ECb (39. Ge.) folglich AC = Cb. Eben so ist BC = Ca und ACB = acb (39. Ge.) folglich AB = ab (51. Ge.).

In (V. 1.) kann man statt der Linien qg ꝛc. die ph ꝛc. betrachten welche jenen gleich sind (93. 102. Ge.) Man lege nun in Gedanken das △ mda auf △ phk, so wird nach der Vorschr. da mit hk congruiren und dm in die Linie hp fallen, indem bey d und h rechte Winkel sind. Da nun der Winkel amd > kph (109. Ge.) so wird mad < pkh (110. Ge.) folglich muß am zwischen pk und kh fallen, so daß pf den Unterschied zwischen ph und md vorstellen kann. Da nun zugleich kf und Am parallel werden (93. Ge.) so ist

pf : fk = pm : mA (183. Ge.)

ferner ma : ad = mA : AD oder weil ma = fk und ad = kh;

so ist fk : kh = mA : AD

folglich pf : kh = pm : AD (233. Ar.)

§. 10.

Erkl. Wenn man die Höhe eines Orts über einem andern mit einer Wasserwaage, davon eine Art oben in (8) kürzlich ist beschrieben worden, abmißt, so nennt man dieses Geschäfte das **Wasserwägen** oder **Nivelliren**, weil man gewöhnlich dadurch das Gefälle eines Flusses zu erforschen sucht.

§. 11.

Aufg. Ein paar Oerter b und n gegeneinander abzuwägen Fig. 144.

Aufl. 1) Man stecke in b und n Stäbe mit Merkzeichen die sich daran verschieben und durch Stellschrauben in einem beliebigen Punkte befestigen lassen.

2) Man setze das Instrument ohngefehr in die Mitte zwischen beyde und stelle es so daß die Luftblase in der Glasröhre genau im Mittel steht und folglich die Gesichtslinien durch die Diopter welche mit der Axe der Glasröhre parallel läuft, horizontal wird.

3) Man visire nach den Stäben und lasse durch einen Gehülfen die Merkzeichen so lange verschieben bis die Gesichtslinie gerade auf ihren Mittelpunkt trift.

4) Man messe alsdann ab und cn so wird cn — ab das Gefälle anzeigen.

Beweis. Man ziehe durch den untersten Punkt n eine Parallele mn mit ac; da nun die Stäbe allemal senkrecht stehen, so ist am = cn (102. Geom.) folglich cn — ab = am — ab = bm als der Höhe von b über n.

§. 12.

Anm. Wenn man die Erde als eine Kugel betrachtet, so ist ein Stück eines größten Kreises auf der-

derselben in allen Punkten von ihrem Mittelpunkte gleich weit entfernt (24. Ge.) und heißt eine Horizontallinie. Eine solche stellt nun m n vor; wenn aber m n gerade ist, so ist es eigentlich nur die Tangente von der wahren Horizontallinie und heißt deshalb die scheinbare. Bey einer mäßigen Entfernung der Oerter ist nun die wahre Horizontallinie von der scheinbaren nicht merklich verschieden; bey großen Entfernungen hingegen muß man allerdings auf diesen Unterschied Rücksicht nehmen. Man betrachte z. B. Fig. 145. wo μ n die wahre und m n wie in Fig. 144. die scheinbare Horizontallinie ist. Hier fällt in die Augen, daß a m merklich vom Parallelismus mit c n abweicht, folglich a m nicht ganz gleich mit c n und b m noch weniger als die senkrechte Erhebung des Punkts b über die Horizontallinie durch n, angenommen werden kann, sondern daß dazu noch das Stück m μ kommen muß. Wieviel dieses für eine gewisse Weite m n oder n μ (welche beyde Linien man, wenn sie auch eine ganze Meile betragen, als gleich groß annehmen kann) beträgt, läßt sich berechnen. Es ist nemlich wenn n o der Halbmesser der Erde $=$ r, und n m $=$ d gesetzt wird, m o^2, d. i. $(m\mu + r)^2 = r^2 + d^2$ (127. Ge.), und wenn man linker Hand wirklich quadrirt, $m\mu^2 + 2\,r.\,m\mu + r^2 = r^2 + d^2$. Da $m\mu^2$ in Vergleichung mit den andern hier vorkommenden Größen ganz unbeträchtlich wird, so kann man es aus der Formel weglassen; ausserdem auf beyden Seiten r^2 abziehen und mit 2 r dividiren, so erhält man $m\mu = \frac{d^2}{2\,r}$. Da nun 2 r als der Durchmesser der Erde eine beständige Größe ist, so werden sich die verschiedenen m μ verhalten wie die Quadrate der Entfernung der

Oerter, d. i. wenn n m 2 oder 3mal grösser wird, so wird m μ, 4 oder 9 mal grösser. Folgende Tafel die auf 12 theilichtes Maas eingerichtet ist, zeigt dieses umständlicher.

Wenn d = 25 Ruthen, so ist m μ =	0′	0″	I″ 3
50	,,	,,	I
75	,,	,,	3
100	,,	,,	5
125	,,	,,	8
150	,,	I	,,
175	,,	I	4
200	,,	I	9
225	,,	2	3
250	,,	2	9
275	,,	3	4
300	,,	4	,,
325	,,	4	8
350	,,	5	5
375	,,	6	3
400	,,	7	I
425	,,	8	,,
450	,,	9	,,
475	,,	10	,,
500	,,	11	I
625	I	5	4
750	2	I	0
1000	3	8	5

Wenn man m μ^2 mit in Betracht zieht, so findet man bey großen Weiten etwas weniger, als die Tafel angiebt z. B. bey 1000° nur 3′ 8″ 0‴. Mehreres

von

von dieser Rechnung s. m. in Hrn. Hofr. Kästn. Statik S. 73. und in den Zugaben S. 329.

§. 13.

Zus. Wenn die Entfernung von b bis n sehr groß ist, oder gewisser Hindernisse wegen, beyde Grenzpunkte von einem dazwischen liegenden dritten nicht gesehen werden können, so nimmt man mehr als eine Operation (coup de niveau) vor, und addirt sowohl die sämmtlichen an der rechten Seite der Stäbe vorkommenden Höhen besonders, als auch die an der linken vorkommenden, wo alsdann der Unterschied beyder Summen, das Gefälle angiebt. Stellt bn das Ufer eines Flusses vor, welches an einem Ende mehr über die Wasserfläche erhoben ist als an dem andern, so rechnet man die Erhabenheit bey b mit zu den rechts- und die bey n zu den links vorkommenden Höhen. Z. B. Fig. 46. seyen die Höhen rechts 4′ und 5′; die links 7′ und 9′ so ist das Gefälle (7 + 9) — (4 + 5) = 7′. Die Richtigkeit dieses Verfahrens erhellt daraus, daß f um 7 — 4 niedriger liegt als b und n wieder 5 — 9 niedriger als f, folglich n um (7 — 4) + (9 — 5) niedriger als b. Wenn man nun in jenem Falle wirklich subtrahirt und in diesem wirklich addirt, so erhält man in beyden Fällen einerley.

§. 14.

Erkl. Ein Feld in Grund legen oder einen Grundriß davon verfertigen, heißt die Figur dieses Feldes

Feldes nach horizontalen Linien so ins Kleine zeichnen, daß die Figur auf dem Papier der auf dem Felde ähnlich wird. Man hat mehrerley Arten dieses zu bewerkstelligen.

§. 15.

Aufg. Ein Feld in Grund zu legen.

Aufl. I. Wenn es verstattet ist in demselben herum zu gehen. Fig. 100 und 101.

Man zerlege das Feld durch Diagonalen in Dreyecke; messe alle Seiten derselben und zeichne ein Dreyeck nach dem andern mittelst des verjüngten Maasstabes so ins Kleine, daß sie in eben der Ordnung auf dem Papier neben einander zu liegen kommen wie sie auf dem Felde gelegen haben.

Will man nicht alle 3 Seiten brauchen, so kann man auch statt ein- oder zweyer derselben, ein oder zwey Winkel nehmen, nur muß man, wenn 2 Seiten und ein nicht eingeschlossener Winkel gebraucht werden, an (30. Trig.) denken, damit man nicht statt eines spitzwinklichten Dreyecks ein stumpfwinklichtes, oder umgekehrt, erhalte.

Man kann auch innerhalb des Feldes eine gerade Linie von einem Winkel bis zum entgegengesetzten abstecken und Perpendikel von allen Winkeln auf diese Linie fallen lassen, etwa wie Fig. 99. die sich alsdann mit dem Winkelhaken und verjüngten Maasstab auf das Papier tragen lassen.

Noch

Noch eine andere Art. Fig. 147. Man neh-
ie innerhalb des Feldes einen Punkt g an, setze
ber denselben den Meßtisch, visire nach allen
unkten A, B ꝛc. die man in den Riß bringen
ill und zeichne die Anfänge der Gesichtslinien
a, gb ꝛc. Messe hernach die Linien gA, gB ꝛc.
nd trage sie nach dem verjüngten Maasstab in
e auf den Tisch gezogenen gleichnahmigen Linien,
ergiebt sich hier wie in (9. I. 2.) eine der Figur
es Feldes ähnliche im Kleinen.

Statt des Tisches kann man auch den Winkel-
tesser gebrauchen, und mit Hülfe des Transpor-
urs den Riß auf das Papier bringen In die-
m Fall entwirft man sich vorher die Figur nach
em Augenmaße oder macht sich einen sogenannten
Brouillon in welchen man die Linien und Winkel
ie sie gemessen werden, nach bloßen Zahlen
nträgt.

**II. Wenn man das Feld blos umgehen
ann.** Fig. 148.

Man entwerfe sich die Figur ohngefehr; messe
lsdann alle Seiten, und 3 Winkel weniger als
re gesammte Anzahl beträgt; oder alle Winkel
s auf einen, und alle Seiten, bis auf 2, und
hreibe diese Maaße in den Entwurf, so läßt sich
e Figur verzeichnen.

Wenn man keinen Winkelmesser hat, oder
rauchen will, so kann man die Winkel dadurch
erhal-

erhalten, daß man die Seiten der Figur BA, DA, bis nach f und e nach Belieben z. B. um 1 Ruthe verlängert, in e und f Stäbe einsetzt, und ef mißt. Es bestimmen nemlich die 3 Seiten Ae, ef und Af den Winkel eAf, und eAf ist = BAD (39 Se.). Eben so verfährt man bey B. Wenn ein einwärtsgehender Winkel C vorkommt, so mißt man Ck, Ci und ik ab. Wenn es sich thun läßt, so kann man auch die Dreyecke hineinwärts nach der Figur abstecken, und die Seiten messen wie A ε Φ.

Auf andere Art. Fig. 149.

Man setze den Meßtisch über einen Punkt B, lege das Diopternlineal an einen Punkt b, der senkrecht über B liegt, und visire nach A und C. Man messe alsdann BA, BC und trage sie nach dem verjüngten Maasstab in die Gesichtslinien ba, bc. Nun bringt man den Tisch über C, so daß c senkrecht darüber liegt, und cb in die Gesichtslinie von CB fällt; hierauf visirt man von c nach D, mißt CD und trägt sie auf den Tisch. So fährt man fort bis nur noch eine Linie in der Figur übrig ist, die sich dann wie hier ad von selbst giebt.

Wenn der Platz ein Wald oder Teich wäre, wo es nicht verstattet ist nur etwas über die Grenze hineinzurücken, so steckt man in beliebiger

Weit

Weite Parallelen mit den Grundlinien ab, und setzt den Meßtisch in die Winkel derselben.

Es hält bey diesem Verfahren schwer, alle Fehler zu vermeiden, und wenn dergleichen begangen werden, so schließt sich, wie man sagt, die Figur nicht. In solchem Fall muß ma. die Messung noch einmal rückwärts vornehmen, und wenn sich die Figur wieder nicht schließt, zwischen beyden etwas fehlerhaften Grenzlinien, das Mittel wählen.

III. Wenn man den Platz aus 2 Stellen blos übersehen kann.

Hier verfährt man wie in (9. III. 3. Fig. 140.) Nur daß man statt nach A und B allein zu visiren dieses nach allen Gegenständen thut, die in den Riß kommen sollen, und man kann hiebey erstlich bemerken, daß die Standlinie CD nicht in einer solchen Lage angenommen werden darf, daß sie verlängert in einen Punkt trift, welchen man mit in den Riß haben will, weil in solchem Fall kein Durchschnittspunkt möglich ist. Zweitens, daß man wegen der mehreren Durchschnitte, jede Gesichtslinie die aus dem ersten Standpunkt C nach einen Gegenstand A gezogen wird, besonders bezeichne z. B. mit α, und hernach blos diese bezeichnete Linie durchschneide, wenn aus dem andern Standpunkte D wieder nach dem vorigen Gegenstand A visirt wird.

Man kann auch mit großem Vortheil blos in C den Meßtisch, und in D den Winkelmesser gebrauchen. Wenn nehmlich cd auf dem Meßtisch bestimmt ist, und die übrigen Gesichtslinien c α ꝛc. alle gezogen sind, so trägt man aus d die in D gemessenen Winkel auf, da sich dann die Durchschnitte eben so ergeben, als wenn man den Tisch in D gehabt hätte. Die Schwierigkeit einen Punkt auf dem Tische genau über einem bestimmten auf der Erde, und dabey die gezogene Gesichtslinie zugleich in ihre vorige Lage zu bringen, macht dieses Verfahren sehr empfehlungswürdig. Es haben sich deshalb die Feldmesser viele Mühe gegeben Methoden und Werkzeuge zu erfinden, mittelst deren man Weiten aus Einem Stande messen könnte. Man sehe hiervon Hrn. Hofr. Kästn. Anm. zum 36 Satz seiner Geom.

Der Beweis von der Richtigkeit dieser Verfahrungsarten gründet sich so wie der zu (9) ganz auf die Lehre von der Aehnlichkeit der Drepecke (183 ꝛc. Ge.).

§. 16.

Anm. Bey krummlinigten Feldern wie Fig. 150. läßt man auf eine gerade Linie die entweder inner- oder ausserhalb der Figur abgesteckt worden so viel Perpendikel fallen, als beträchtliche Biegungen vorkommen. Diese Perpendikel mißt man so wie die Abstände der Punkte auf der geraden Linie in welche sie fallen, da sich dann mittelst eines Winkelhakens und verjüngten Maas-

Maasstabes der Riß immer um desto genauer verfertigen läßt, je mehr man Perpendikel gebraucht hat.

§. 17.

Anm. Wenn man ein Feld ausrechnen oder theilen soll, so legt man es erstlich in Grund und verrichtet alsdann die Ausrechnung und Theilung auf dem Papier nach (214 ꝛc. Ge). Die Punkte der Theilung werden hernach auf ähnliche Art vom Riße ins Feld getragen, als man sie vom Felde auf den Riß zu bringen gelernt hat; mündliche Anweisung thut hier das beste.

§. 18.

Anm. Wenn das Feld zu groß ist, als daß es auf einmal auf den Meßtisch gezeichnet werden könnte, so theilt man es in mehrere Partien ab, und verbindet die benachbarten durch eine Linie, welche mit der Standlinie CD Fig. 140 viel Aehnlichkeit hat. Man kann auch dadurch ein großes Feld in einen kleinen Raum bringen, daß man die Linien die auf dem verjüngten Maasstabe sonst Fuße galten, als Ruthen, oder auch wohl die Zolle als Ruthen ansieht. Wenn man einen Riß abtragen will, so geschieht es entweder mit der Kopirnadel oder nach Dreyecken, mit einem dreyschenklichten Zirkel, denn die geometrische Methode, die Dreyecke in welche sich der Riß theilen läßt, abzutragen, ist in der Ausübung zu beschwerlich. Auf dem Risse selbst werden die einzelnen Partien besonders benannt, Berge, Waldungen, Flüße, Wege und dergl. besonders bezeichnet und illuminirt. Die Lage des Feldes nach den Weltgegenden bezeichnet man durch die Richtung der

Magnetnadel oder eines Pfeils, welches man die Orientirung des Risses nennt, und am untern Theile desselben verzeichnet man den gebrauchten Maaßstab. In einer seitwärts stehenden, und mit den Eigenthümlichkeiten der Gegend verzierten Einfassung, welche man **Cartouche** nennt, wird, wie auf dem Titel eines Buchs bemerkt, was der Riß eigentlich vorstellen soll. Mehreres muß man aus praktischen Schriftstellern oder mündlicher Anweisung erlernen.

Die sphärische Trigonometrie.

§. 1.

Erklär. Wenn auf der Fläche einer Kugel drey Bögen größter Kreise zusammentreffen, so bilden sie ein **sphärisches** = oder **Kugel** = **Dreyeck**, und die Wissenschaft aus dreyen beliebigen Stücken eines solchen Dreyecks die übrigen zu berechnen heißt die **sphärische Trigonometrie.**

§. 2.

Zus. Der Winkel welchen zwey solche größt Kreise bey ihrem Zusammentreffen mit einande machen, heißt ein **sphärischer**, und seine Größ wird durch den Neigungswinkel bestimmt, welcher die Ebnen jener beyden größten Kreise mit einan der machen (340. Geom.). Das Maaß eines sphä rischen Winkels ist also ein Stück eines größten Kreises welches seine Schenkel an der Stelle trift

wi

› sie Quadranten sind (342. Geom.). Ist dieses
'aaß ein Quadrant, so ist der Winkel ein rechter.

§. 3.

Zus. Sphärische Nebenwinkel machen wie die
nen, zusammen 180° und sphärische Verticalwin-
l sind ebenfalls einander gleich (30. 39. Geom.).
›en so sind auch die beyden Winkel, in welchen
h zwey größte Kreise schneiden, einander gleich,
ı sie in der Mitte, wo die Schenkel Quadran-
n sind, einen gemeinschaftlichen Bogen zu ihrem
'aaß haben.

§. 4.

Erkl. Ein sphärisches Dreyeck heißt, so wie
n ebnes, rechtwinklicht, wenn einer von den
Winkeln ein rechter ist. Indessen können in einem
härischen Dreyecke alle drey Winkel rechte seyn.
'an lasse nemlich Fig. 127. aus dem Pol a eines
'ößten Kreises δmd ein paar Quadranten aD,
d auf den Kreis so fallen, daß durch dieselben
enfalls ein Quadrant Dd von dem Kreise abge-
)nitten wird, so sind alle drey Winkel rechte.
341. Ge. u. 2.) Der Winkel am Pol kann noch
'ößer als ein rechter seyn, und so kann es im
härischen Dreyeck ausser zwey rechten Winkeln
och einen stumpfen geben ꝛc. Aber man theilt
em ohnerachtet die sphärischen Dreyecke überhaupt
ur in rechtwinklichte und schiefwinklichte ein.

§. 5.

Anm. Beym rechtwinklichten sphärischen Dreyecke unterscheidet man ebenfalls die beyden Perpendikel und die Hypothenuse. Unter den drey hier gegebenen Stücken wird der rechte Winkel der das Dreyeck zum rechtwinklichten macht, niemals besonders erwehnt, sondern von selbst verstanden. Wenn also ein **anliegender** Winkel an einem Perpendikel oder an der Hypothenuse genannt wird, so ist niemals jener rechte Winkel darunter zu verstehen.

§. 6.

Anm. Da bey den sphärischen Dreyecken die Seiten eben so wie die Winkel durch Grade ꝛc. ausgedrückt werden, so nennt man eine Seite **spitzig** oder **stumpf**, je nachdem sie unter, oder über 90° beträgt. **Gleichartig** heißen über dieses Seiten oder Winkel, wenn sie beyde über, oder beyde unter 90° enthalten; ungleichartig also, wenn eines von ihnen über und das andere unter 90° beträgt.

§. 7.

Anm. Jedes Kugeldreyeck kann als die krumm Grundfläche einer Art von Pyramiden angesehen werden, deren Spitze sich im Mittelpunkt de Kugel befindet, und deren Seitenflächen Theil von den Ebnen der größten Kreise sind, welch die Seiten des Kugeldreyecks ausmachen. Wa also in ausführlichern Lehrbegriffen von den ebne Winkeln die einen Körperwinkel einschließen, er wiesen wird, das gilt auch von den Seiten eine Kugeldreyecks, nemlich daß jedesmal zwey Seite

zusam

zusammen größer, als die dritte sind und alle drey zusammen weniger als einen ganzen Kreis betragen. Uebrigens können alle sphärische Dreyecke so angenommen werden, daß keine Seite und kein Winkel über 180° beträgt, und von solchen Dreyecken ist auch in der Folge blos die Rede.

§. 8.

Aufg. In einem rechtwinklichten sphärischen Dreyecke abc Fig. 151. wo bey a der rechte Winkel ist, aus zwey Stücken nebst dem rechten Winkel, die übrigen zu finden.

1. Wenn von der **Hypothenuse**, dem **anliegenden Winkel** und dem ihm **gegenüberstehenden Katheten** die Frage ist.

Aufl und Beweis. Es sey k der Mittelpunkt der Kugel, und abk ein Ausschnitt von der Ebne des Kreises welchem ab zugehört, so wird man sich c über die Ebne dieses Ausschnitts erhaben, gedenken müssen. cm sey ein Perpendikel auf ak, dem Durchschnitt der Ebnen abk und ack, welche letztere auf der erstern senkrecht steht; es wird also jenes Perpendikel auf der Ebne abk senkrecht seyn (271. Ge.). Ferner sey cn senkrecht auf bk, dem Durchschnitt der Ebnen bck und abk, so ergiebt sich aus (261. 263. Ge.), daß auch mn senkrecht auf bk und folglich cnm der Neigungswinkel der Ebnen bck und abk (252. e.), also cnm = b ist (2). Auch ist für den

Halbmesser der Kugel, welcher zugleich der Halbmesser für alle größte Kreise ist (329. Se.), cn = sin. bc und cm = sin. ac (2. Trig.). Nun ist im ebnen △ cnm

r : sin cnm = cn : cm (19. Trig.) wenn man also substituirt, so erhält man

1) r : sin. b = sin. bc : sin. ac, oder auch wenn man die Buchstaben verwechselt,

2) r : sin. c = sin. bc : sin. ba

Von den, ausser r, hier vorkommenden Stücken kann jedes die Stelle des vierten Gliedes einnehmen, weshalb man mehr- und hier in allem sechserley Auflösungen bekommt. Diese Bemerkung gilt auch für die folgenden Fälle.

Z. B. es sey b = 23° 28'; bc = 34° 27', so ist log. sin. b = 9.6001181
log. sin. bc = 9.7525761

19.3526942
log. r. = 10.0000000

log. sin. ac = 9.3526942

Dieser gehört zu 13° 1' .. Statt log. r wirklich unter zu schreiben, wäre es hinlänglich gewesen die 1 neben der 9 wegzustreichen.

II. Von beyden Katheten und einem anliegenden Winkel.

Es

Es ist im $\triangle$ ckm

km : cm = r : tang. ac) (10. 28.
[i]m $\triangle$ cmn, cm : mn = tang. b : r) II. Trig.)
also km : mn = tang. b : tang. ac
(233. Ar.)

und km : mn = r : sin. nkm oder sin. ab, n. d. Figur

[al]so hat man, 1) r : sin. ab = tang. b : tang. ac
2) r : sin. ac = tang. c : tang. ab.

Nach (15. Trig.) ist tang. b = $\frac{r^2}{\text{cot. b}}$, und [t]ang. ac = $\frac{r^2}{\text{cot. ac}}$ folglich

tang. b : tang. ac = cot. ac : cot. b (206. Ar.)

also wird aus 1) nun:

3) r : sin. ab = cot. ac : cot. b

[E]ben so 4) r : sin. ac = cot. ab : cot. c

Weil cot. ac = $\frac{r^2}{\text{tang. ac}}$ so kann man statt (3)) auch setzen

r : $\frac{r^2}{\text{tang. ac}}$ = sin. ab : cot. b (231. II. Ar.)

[o]der r. tang. ac : r^2 = sin. ab : cot. b

[o]der tang. ac : r = sin. ab : cot. b

also 5) r : tang. ac = cot. b : sin. ab

Eben so statt (4))

6) r : tang. ab = cot. c : sin. ac

Es sey z. B. ab = 24° 29′ und c = 68° 45′, so ist

$$\begin{aligned} \log.\ \text{tang.}\ ab &= 9.6583692 \\ \log.\ \cot.\ c &= 9.5898142 \\ \hline \log.\ \sin.\ ac &= 9.2481834 \end{aligned}$$

gehört zu 10° 12′ . . .

No. 3 und 4 sind deshalb besonders entwickelt worden, damit man b und c finden, und doch r im ersten Gliede bleiben könne, welches man wegen der Bequemlichkeit beym rechnen gern hat. Durch no. 5. findet man ab aus ac und b, da man es nach no. 2) aus ac und c fand; und nach no. 6) findet man ac aus ab und c, da man es nach no. 1. aus ab und b fand.

III. Von einem Katheten und beyden Winkeln.

Man verlängere Fig. 152. die Seiten ba, bc und ac bis sie Quadranten werden, nach e, und d, so sind ae, cf und cd, die Ergänzungen von ba, bc und ac (7 Trig.) und df die von b (2) mithin sin. ae oder sin. d = Cos. ab

sin. cf = cos. bc

sin. cd = cos. ac

sin. df = cos. b und eben so auch

tang. d = cot. ab u. s. w. Auch ist bey f ein rechter Winkel (343. Ge.), und es ist deshalb im △ cdf

r : sin

r : sin. c = sin. cd : sin. df (I. 1.)
oder 1) r : sin. c = cos. ac : cos. b
2) r : sin. b = cos. ab : cos. c wenn
man die Buchstaben verwechselt.

Es sey b = 23° 28′; ab = 24° 29′
so ist log. sin. b = 9. 6001181
log. cos. ab = 9. 9590805
log. cos. c = 9. 5591986 gehört zu
68° 45′ ..

IV. Von allen drey Seiten.

Es ist wieder im △ cdf
r : sin. d = sin. cd : sin. cf (I, 2.)
oder r : cos. ab = cos. ac : cos. bc

Es sey ab = 24° 29′, ac = 10° 12′
so ist log. cos. ab = 9. 9590805
log. cos. ac = 9. 9930814
log. cos. bc = 9. 9521619 gehört
zu 26° 24′ ..

V. Von zwey Winkeln und der Hypothenuse.

Im △ cdf ist
r : sin. cf = tang. c : tang. df (II. 1.)
oder 1) r : cos. bc = tang. c : cot. b
und 2) r : cos. bc = tang. b : cot. c wie in (II. 3.)
auch 3) r : cot. b = cot c : cos. bc Nach
Art des Verfahrens in (II.)

Es

Es sey b = 23° 28'; c = 68° 45' so ist

log. cot. b = 10. 3623894
log. cot. c = 9. 5898142

log. cos. bc = 9. 9522036 gehört zu 26° 24'.

VI. Von Hypothenuse, Perpendikel und anliegendem Winkel.

Im △ cdf ist

r : sin. df = tang. d : tang. cf

oder: 1) r : cos. b = cot. ab : cot. bc (II. 2.)
oder: 2) r : cos. b = tang. bc : tang. ab wie in (II. 3.)
oder: 3) r : cot. bc = tang. ab : cos. b wie in (II. 5.)

Und wenn man die Buchstaben verwechselt

4) r : cos. c = cot. ac : cot. bc
5) r : cos. c = tang. bc : tang. ac
6) r : cot. bc = tang. ac : cos. c

Es sey bc = 26° 24'; ab = 24° 29' so ist nach (3))

log. cot. bc = 10. 3041645
log. tang. ab = 9. 6583692

log. cos. b = 9. 9625337 gehört zu 23° 27' . . .

Um im vorkommenden Falle das Gesuchte sogleich aus dem Gegebnen zu finden, sind am Ende die

die verschiedenen Fälle in der I. Tafel zusammengestellt worden.

§. 9.

Zus. Nach (2 rc. Trig.) gehören die Sinus und Tangenten, welche man nach den vorigen Proportionen findet, mehr als einerley Bogen zu, und sind deshalb vieldeutig; da indessen hier nur Bögen die nicht über 180° gehen, betrachtet werden (7), so zeigt sich blos eine Zweydeutigkeit, die auch in vielen Fällen gehoben werden kann, wenn man die Sätze in (4, 9, 11, 15. Trig.) mit denen in (118, 119, Ar.) verbindet.

§. 10.

Lehrs. I. Ein Perpendikel ist allemal mit dem ihm gegenüberstehenden Winkel gleichartig, das andere mag übrigens spitzig oder stumpf seyn.

II. Beyde Perpendikel sind spitzig oder stumpf, je nachdem beyde Winkel spitzig oder stumpf sind.

III. Wenn ein Winkel spitzig und der andere stumpf ist, so ist auch das dem spitzigen Winkel entgegenstehende Perpendikel spitzig, und das dem stumpfen entgegenstehende, stumpf.

IV. Wenn die beyden Perpendikel gleichartig sind, so ist die Hypothenuse spitzig; wenn

wenn sie aber ungleichartig sind, stumpf. Hinwiederum sind bey einer spitzigen Hypothenuse die Perpendikel gleichartig, und bey einer stumpfen ungleichartig.

V. Wenn die Hypothenuse mit dem einen Winkel gleichartig ist, so ist der andere allemal spitzig.

VI. Die Hypothenuse ist spitzig, wenn ein Winkel und sein anliegendes Perpendikel gleichartig sind; sind hingegen diese Dinge ungleichartig, so ist die Hypothenuse stumpf.

Beweis. Für I. In (8. II. 1. 2.) kann r als die Einheit, und folglich durchaus als bejaht angenommen werden (6 Trig. und 118 Ar.). Das 2te Glied ist auch immer bejaht, (4. Trig.) Das dritte aber kann bejaht und verneint seyn (11. Trig.) folglich wird das vierte bejaht oder verneint seyn, je nachdem es das dritte ist, indem man das vierte als ein Product aus dem zweyten ins dritte, ansehen kann. Nun aber enthält das vierte Glied die Tangente eines Perpendikels und das dritte die Tangente des demselben gegenüberstehenden Winkels, folglich sind diese beyden Dinge allemal gleichartig, d. i. wenn die Tangenten bejaht sind, so ist Perpendikel und gegenüberstehender Winkel spitzig, und wenn sie verneint sind, stumpf.

Für. II. In (8. III. 1. 2.) sind die zweiten
·lieder immer bejaht; die dritten werden also be-
·ht seyn müssen, wenn es die vierten seyn sollen,
·lglich werden die Perpendikel spitzig, wenn es die
·inkel sind.

Sind hingegen die Winkel stumpf, so ist in
·er erstern Proportion sin. c bejaht, und cos. b
·erneint, also auch cos ac verneint; und in der
·tztern Proportion ist sin. b bejaht und cos. c
·erneint, also wieder cos. ab verneint, also sind
· c und ab stumpf (9. Trig.), wenn b und c
·umpf sind.

Für. III. Wenn in eben den Proportionen c
·pitzig, und b stumpf ist, so ist in der erstern sin.
· bejaht, und cos. b verneint, also cos. ac ver-
·eint, folglich ac stumpf; und in der letztern
·roportion wird sin. b bejaht, und cos. c eben-
·alls, folglich cos ab auch bejaht, und deshalb
·b spitzig. Es steht aber ac dem b, und ab
·em c gegenüber.

Für. IV. In (8. IV.) kommen im zweiten
·nd dritten Gliede die Cosinusse der Perpendikel
·or; sind diese beyde bejaht, oder beyde verneint,
·o ist allemal das vierte Glied bejaht; da nun die-
·ses den cos. der Hypothenuse enthält, so wird
·diese spitzig seyn, wenn beyde Cosinusse einerley
Zeichen haben. Ist aber einer bejaht und der an-

dere

dere verneint, so wird auch cos. bc verneint folglich bc stumpf.

Wenn bc spitzig ist, so wird cos. ac bejah oder verneint seyn, nachdem es cos. ab ist; ist hin gegen bc stumpf, so wird cos. ac verneint werde wenn cos. ab bejaht ist; hieraus ergiebt sich als der andere Theil des Satzes.

Für. V. In (8. V. 3.) wird das 4te Glie bejahend, wenn das 2te und 3te gleichartig sind Das 4te Glied enthält den cos. der Hypothenus ist also diese spitzig und c auch, so muß auch spitzig seyn; und eben so wenn die bc und stumpf sind, muß wieder b spitzig seyn, weil son seine Cotangente nicht bejaht seyn, und wen dieses nicht wäre, cos. bc nicht verneinend we den könnte.

Für. VI. In (8. VI. 1 und 4.) wird das 4 Glied bejahend, wenn das 2te und 3te gleichart sind, d. i. wenn Perpendikel und anliegender Wi kel beyderseits spitzig sind, so sind cos. und co von ihnen bejahend; und wenn sie beyderseit stumpf sind, so sind cos. und cot. verneinen die Producte aber in beyden Fällen bejahend, fol lich bc spitzig.

§. 11.

Zus. Wenn man nun die Fälle in der I. Ta nach solchen Betrachtungen einzeln durchgeht,

erhä

chält man jedesmal wegen der in (9) erwehnten
wendeutigkeit unmittelbar Auskunft, wenn das
lied wovon die Frage ist, keinen Sinus betrift.
esetzt aber auch, es beträfe einen Sinus, wie im
ten Falle, so kann die Sache doch entschieden wer-
en, indem dieses Glied einen Winkel betrift, wel-
er nach (10. I.) mit seinem entgegenstehenden
erpendikel gleichartig seyn muß. Er wird also
itzig oder stumpf seyn, je nachdem a b in der Pro-
ortion spitzig oder stumpf ist. Eben diese Be-
andtniß hat es auch mit dem 14, 23 und 25.
alle. In den Fällen 10, 11, 12, 16, 17, 18
ber ist aus den bisher gebrauchten Gründen keine
ntscheidung möglich, sondern es geht hier wie in
30. Trig.). Denn wenn man Fig. 152. die Sei-
en b a und b c bis zu Halbkreisen verlängert, so
erden sie in β einander schneiden, und es kann
β = a b und β γ = b c genommen werden,
o dann α γ = a c wird. Ist also b und a c
egeben, und b a wird gesucht, so sind die gege-
enen Stücke den beyden Dreyecken b a c und b α γ
öllig gemein und es kann deshalb im 16ten Falle
elcher mit dem 10ten einerley ist, aus ihnen im
rstern △, b a und im andern, b α, d. i. die Er-
gänzung von b a zu 180° gefunden werden. Eben
o wenn wieder b und a c gegeben sind, und b c
esucht wird, so passen beyde Stücke abermals für
eyde Dreyecke und es kann aus ihnen eben so
vohl b c als b γ berechnet werden. Gleiche Be-
vandtniß hat es auch wenn der Winkel b c a oder

 sein

sein Nebenwinkel $\alpha\gamma b$ nach dem 12 oder 18ten Fall gefunden werden.

§. 12.

Aufg. In einem schiefwinklichten sphäri- schen Dreyecke bcd, wo eine Seite bc ein Quadrant ist, aus drey gegebenen Stücken die übrigen zu finden.

Aufl. und Beweis. I. Fall. Fig. 153. wenn bd $< 90^\circ$. Man verlängere dann bd bis zu einem Quadranten nach a, und ziehe ca, dieser wird ein Perpendikel (343. Ge.), und folglich acd ein rechtwinklichtes Dreyeck seyn. In demselben ist ad $= 90^\circ -$ bd; acd $= 90^\circ -$ dcb ca $=$ b; cda der Nebenwinkel von bdc, und dc beyden durch ca und die Verlängerung von bd entstandenen Dreyecken, gemeinschaftlich. Soll man also z. B. db finden, so suche man im $\angle$ acd die Seite ad (I. Taf. 13, 16, 19, 22, 25 28. Fall) und ziehe sie von 90° ab, da dann der Rest db seyn wird. Auf ähnliche Art verfähr man auch, wenn die übrigen Stücke gesucht werden.

II. Fall. Wenn bd $> 90^\circ$ ist, Fig. 15 Hier nehme man wieder ba $= 90^\circ$, so wird wie vorhin, adc ein rechtwinklichtes Dreyeck und a $=$ bd $- 90^\circ$; acd $=$ bcd $- 90^\circ$; ca $=$ b Sollte man also z. B. wieder db finden, so suche man in $\triangle$ acd die Seite da und addire da

9c

)0°. Sollte man b finden, so suche man ca u.
. w. Es sey db = 100°; dc = 25° 24′, so
st ad = 10°, und nach (I. Taf 4. Fall.) cos.
10° : r = cos. 25°, 24′ : cos. ca oder cos. b,
also

$$\begin{aligned} \log. \cos. 25^\circ 24' - \log. r &= 19.9558490 \\ \log. \cos. 10^\circ &= \underline{\ 9.9933515} \\ \log. \cos\ b &= 9.9624975 \end{aligned}$$

dieser gehört zu 23° 28′ — . .

§. 13.

Lehrs. Wenn in einem schiefwinklichten sphärischen Dreyecke Fig. 155. I. die Winkel an der Grundlinie gleichartig sind, so fällt ein Perpendikel von der Spitze innerhalb des Dreyecks.

II. Wenn sie ungleichartig sind, so fällt es ausserhalb desselben.

Beweis für I. Man setze über den Kreis bad $\beta\alpha\delta$ zwey Halbkreise bβ und dδ so, daß die Winkel cba und cda spitzig sind; es werden also auch cβd und cδb spitzig (3); die Nebenwinkel cbδ und cdβ, so wie c$\beta\alpha$ und c$\delta\alpha$ stumpf seyn. Nun stehe ein dritter Halbkreis aα durch c auf dem ganzen Kreise senkrecht, so muß er denselben entweder zwischen bd und $\delta\beta$ oder zwischen bδ und dβ treffen. Sollte es nun an den letzten Orten geschehen, so würden die Stü-

cken von ihm, welche aus c als Perpendikel au
die Grundlinien der Dreyecke fallen, auf der e
nen Seite einen spitzigen Winkel z. B. cδb un
auf der andern einen stumpfen cbδ gegen si
über haben, dieses widerspräche aber (10. I.); als
wird der senkrechte Halbkreis aα zwischen b,
und β, δ fallen müssen.

Für II. Es erhellet eben so wie vorhin, da
das Perpendikel itzt nicht innerhalb des Dreyeck
fallen kann, indem es sonst mit dem einen Wink
gleichartig und mit dem andern ungleichartig we
den müßte, welches unmöglich ist.

§. 14.

Zus. Das Perpendikel also das ausserhalb d
Dreyecks fällt, ist ungleichartig mit dem Winkel i
Dreyecke der ihm am nächsten liegt, denn es
gleichartig mit dessen Nebenwinkel; aber gleichart
wird es mit dem im △ seyn, welcher der en
ferntere von ihm ist.

§. 15.

Aufg. In jedem schiefwinklichten sphär
schen Dreyecke bcd, wo nicht lauter Seite
oder lauter Winkel gegeben werden, aus dr
Stücken die übrigen zu finden Fig. 155.

Aufl. und Beweis. Man lasse aus eine
Winkel c auf die gegenüberstehende Seite bd od
deren Verlängerung, ein Perpendikel ca falle

erhält man zwey rechtwinklichte Dreyecke in wel-
en der rechte Winkel und das Perpendickel ge-
einschaftlich sind. Man hebe also aus Taf. I.
r beyde ein paar Proportionen aus, in deren
der der rechte Winkel und das Perpendikel vor-
mmt, so läßt sich aus ihnen eine dritte entwi-
eln, in welcher entweder sogleich aus drey gege-
nen Gliedern das vierte gefunden wird, oder
o doch aus den gegebnen Stücken dasjenige wel-
es in der entwickelten Proportion mit erforder-
h, unter den gegebnen aber noch nicht mit be-
ndlich ist, durch Auflösung eines rechtwinklichten
reyecks vorher berechnet werden kann. So ist

I. r : sin. b = sin. bc : sin. ac I. Taf. 23. Fall.

nd r : sin. d = sin. cd : sin. ac im △ acd

der sin. d : r = sin. ac : sin. cd (231. I. Ar.)

lso sin. d : sin. b = sin. bc : sin. cd (233. Ar.)

II. r : cot. ac = sin. ab : cot. b I. T. 2. F.

nd r : cot. ac = sin. ad : cot. d im △ acd

lso sin. ab : cot. b = sin. ad : cot. d (204. Ar.)

der sin. ab : sin. ad = cot. b : cot. d (231. II. Ar.)

der sin. ab : sin. ad = tang. d : tang. b. (15. Trig.)

III. r : cos. ac = cos. ab : cos. bc I. T. 1 F.

r : cos. ac = cos. ad : cos. cd im △ acd

also cos. ab : cos. bc = cos. ad : cos. cd

IV. cot. ac : cos. b = r : sin. bca I. T. 18 F

oder cot. ac : r = cos. b : sin. bca (231. II. Ar.

und cot. ac : r = cos. d : sin. acd im △ ac

also cos. b : sin. bca = cos. d : sin. acd

V. r : tang. ac = cot. bc : cos. bca I T. 15 F

und r : tang. ac = cot. cd : cos. acd im △ ac

also cot. bc : cos bca = cot. cd : cos acd

oder tang. cd : tang. bc = cos. bca : cos. ac

Nun können also gegeben seyn

1) Zwey Seiten und ein Winkel der einer de selben gegenüber steht bc, cd, b, und man suc den Winkel d, welcher der andern gegenüber steh so hat man aus (I.)

sin. cd : sin. bc = sin. b : sin. d

Es sey cd = 79° 56′; bc = 57° 41′ u b = 20° 27′

so ist log. sin. bc = 9. 9269114
log. sin. b = 9. 5433103

19 4702217

log. sin. cd = 9. 9932621

log sin. d = 9. 4769596 geh zu 17° 27′ — . .

2) T

2) Die vorigen Stücke und man sucht den Winkel c der von den gegebnen Seiten eingeschlossen ist, so hat man erstlich aus bc und b nach Taf. 24 F. bca

neml. log. cos. bc = 9. 7280275
log. tang. b = 9. 5715811
log. cot. bca = 9. 2996086 giebt ca 78° 43′ + ...

und dann aus (V.) acd, nemlich

log. tang. bc = 10. 1988839
log. cos. bca = 9. 2915040
19. 4903879
log. tang. cd = 10. 7507357
log. cos. acd = 8. 7396522 giebt acd = 86° 51′ + ..

Da nun b und d hier gleichartig sind, so muß man 78° 43′ + 86° 51 = 165° 34, nehmen um bcd zu haben

3) Die vorigen Stücke, man sucht die dritte Seite bd. Man suche erstlich ba aus I. T. 22 F.

log. cos. b = 9. 9717291
log. tang. bc = 10. 1988839
log. tang. ab = 10. 1706130 gehört zu 55° 58′ + ..

 und

und dann nach (III) ad

$$\begin{array}{rl} \log.\cos.\ ab = & 9.7479360 \\ \log.\cos.\ cd = & 9.2425264 \\ \hline & 18.9904624 \\ \log.\cos.\ bc = & 9.7280275 \\ \hline \log.\cos.\ ad = & 9.2624349 \end{array}$$

giebt $ad = 79^\circ\ 27' + \ldots$

also $bd = 55^\circ\ 58' \ldots + 79^\circ\ 27' \ldots = 135^\circ\ 25' +$.

4) Zwey Seiten bc und bd mit dem einge schlossenen Winkel b, man sucht die dritte Seit dc. Man suche erst wieder wie in (3)) ab uni ziehe dieses von bd ab, so erhält man ad; hier auf findet man nach (III) cd

$$\begin{array}{rl} \text{Es ist } \log.\cos.\ bc = & 9.7280275 \\ \log.\cos.\ ad = & 9.2624349 \\ \hline & 18.9904624 \\ \log.\cos.\ ab = & 9.7479360 \\ \hline \log.\cos.\ cd = & 9.2425264 \end{array}$$

giebt $cd = 79^\circ\ 56'$

5) Die vorigen Stücke, man sucht einen Winkel, z. B. d. Man sucht wie in voriger Nummer zuerst ab und ad, und dann aus (II) d.

Es ist log. sin. ab = 9. 9184037
log. tang. b = 9. 5715811

19. 4899848
log. sin. ad = 9. 9925957

log. tang. d = 9. 4973891 gehört
t 17° 27′ — . .

6) Zwey Winkel b und bcd und die von ih=
en eingeschlossene Seite bc; man sucht einen
Winkel, z. B. d.

Erst suche man bca aus I. T. 24. F.

Es ist log. cos. bc = 9. 7280275
log. tang. b = 9. 5715811

log. cot. bca = 9. 2996086 giebt
bca = 78° 43′.

Nun nehme man bcd — bca = acd =
56° 51′. Nun aus (IV) d

log. cos. b = 9. 9717291
log. sin. acd = 9. 9993433

19. 9710724
log. sin. bca = 9. 9915488

log. cos. d = 9. 9795236 giebt
d = 17° 27′ . .

7) Die vorigen Stücke, man sucht eine Seite,
z. B. cd. Man suche wie vorhin erstlich bca und
acd und alsdann cd aus (V)

log. tang. bc = 10. 1988839
log. cos. bca = 9. 2915040

19. 4903879
log. cos. acd = 8. 7399691

log. tang. cd = 10. 7504188 gehört zu 79° 56′ — . .

8) Zwey Winkel b = 20° 27′; d = 17° 27′ und eine Seite die einem dieser Winkel entgegen steht, z. B. bc = 57° 41′, Man sucht eine Seite die einem der gegebenen Winkel entgegen steht, z. B. cd.

Man nehme aus (I)

log. sin. b = 9. 5433103
log. sin. bc = 9. 9269114

19. 4702217
log. sin. d = 9. 4769596

log. sin. cd = 9. 9932621 gehör zu 79° 56′

9) Die vorigen Stücke; man sucht die zwischen den gegebenen Winkeln liegende Seite bd

Man suche erstlich ba wie in (3)) und dann ad aus (II)

log

log. tang. b = 9. 5715811
log. sin. ba = 9. 9184037

19. 4899848
log. tang d = 9. 4973891

log. sin. ad = 9. 9925957 gehört zu 79° 27′

aus ba + ad wird dann wieder bd = 135° 25′ wie in (3)

10) Die vorigen Stücke, man sucht den dritten Winkel c.

Erstlich sucht man bca wie in (6)) und dann acd aus (IV)

log. sin. bca = 9. 9915488
log. cos. d = 9. 9795236

19. 9710724
log. cos. b = 9. 9717291

log. sin. acd = 9. 9993433 gehört zu 86° 51′ und giebt mit 78° 43′ wieder 165° 34′ = c.

§. 16.

Aufg. Aus den 3 Seiten bc, bd, cd eines sphärischen Dreyecks einen Winkel, b zu finden. Fig. 156.

Aufl. und Beweis. 1) Man nenne die Seite cd welche dem Winkel b entgegen steht β; eben so die den Winkeln c und d entgegenstehenden γ und δ. Der Mittelpunkt der Kugel ist k. Aus c

Fälle

fälle man cm senkrecht auf die Ebne bkd; ferner auch cn und cq senkrecht auf kb und kd. Den Halbmesser der Kugel r setze man = 1, so ist

2) cn = $\sin.\delta$ und kn = $\cos.\delta$ (2. Trig.)
Eben so cq = $\sin.\beta$ und kq = $\cos.\beta$
cnm ist wieder wie in (8) = b und cqm = d

3) Im ebnen △ cnm ist
1 : sin. cnm = cn : cm und wenn man substituirt, 1 : sin. b = $\sin.\delta$: cm aus 2)
also cm = sin. b $\sin.\delta$
Eben so, 1 : cos. b = $\sin.\delta$: mn
also mn = cos. b. $\sin.\delta$

4) Im △ nkq ist $nq^2 = kq^2 + kn^2 - 2kq.kn.\cos.k$ (41. Trig.). Da nun bd das Maas von k = γ nach (1)) ist, so wird, wenn man dieses und die Werthe in (2)) substituirt.

$$nq^2 = \cos.\beta^2 + \cos.\delta^2 - 2\cos.\beta.\cos.\delta.\cos.\gamma$$

5) In eben diesem △ ist auch nq : kq = sin. k : sin. knq; oder weil mnk ein rechter Winkel ist, sin. knq = cos. mnq = $\frac{\cos.\beta.\sin.\gamma}{nq}$

6) Im △ mnq ist ebenfalls $mq^2 = mn^2 + nq^2 - 2mn.nq.\cos.mnq$; daraus wird, wenn man aus (5)) den Werth von cos. mnq substituirt,

$$mq^2 = mn^2 + nq^2 - 2mn \cdot nq \frac{\text{cos}.\ \beta \cdot \text{sin}.\ \gamma}{nq}$$

$$= mn^2 + nq^2 - mn \cdot \text{cos}.\ \beta \cdot \text{sin}.\ \gamma$$

7) Aus (127. Ge.) ist auch $mq^2 = cq^2 - cm^2$

8) Man verbinde die Werthe von mq^2 in (6) und 7)) mit einander, so erhält man

$mn^2 + nq^2 - 2mn \cdot \text{cos}.\ \beta \cdot \text{sin}.\ \gamma = cq^2 - cm^2$

hier beyderseits $+ 2mn \cdot \text{cos}.\ \beta \cdot \text{sin}.\ \gamma$. addirt, und $+ cq^2 - cm^2$ subtrahirt, giebt

$mn^2 + cm^2 + nq^2 - cq^2 = 2mn \cdot \text{cos}.\ \beta \cdot \text{sin}.\ \gamma$

In dieser Formel substituire man die Werthe von $mn^2 + cm^2 = cn^2$ (127. Ge.) und von cq^2, aus (2)); von nq^2 aus (4)); und von mn aus (3)), so erhält man $\text{sin}\ \delta^2 + \text{cos}.\ \beta^2 + \text{cos}.\ \delta^2 - 2\ \text{cos}.\ \beta \cdot \text{cos}.\ \delta \cdot \text{cos}.\ \gamma - \text{sin}.\ \beta^2 = 2\ \text{cos}.\ b \cdot \text{sin}.\ \delta \cdot \text{cos}.\ \beta \cdot \text{sin}.\ \gamma$.

9) Aus (8 Trig.) erhält man $\text{sin}.\ \beta^2 = 1 - \text{cos}.\ \beta^2$ also $- \text{sin}.\ \beta^2 = - 1 + \text{cos}.\ \beta^2$

Ebendaher auch $\text{sin}.\ \delta^2 + \text{cos}.\ \delta^2 = 1$

Substituirt man diese Werthe in der letzten Formel von (8)) und hebt $+ 1$ und $- 1$ gegen einander auf, so verwandelt sie sich in

$2\ \text{cos}.\ \beta^2 - 2\ \text{cos}.\ \beta \cdot \text{cos}.\ \delta \cdot \text{cos}.\ \gamma = 2\ \text{cos}.\ b \cdot \text{sin}.\ \delta \cdot \text{cos}.\ \beta \cdot \text{sin}.\ \gamma$

und beyderseits mit $2\ \text{sin}.\ \delta \cdot \text{cos}.\ \beta \cdot \text{sin}.\ \gamma$ dividirt,

$$\frac{\text{cos}.\ \beta - \text{cos}.\ \delta \cdot \text{cos}.\ \gamma}{\text{sin}.\ \delta \cdot \text{sin}.\ \gamma} = \text{cos}.\ b.$$

Hier=

Hieraus entspringt also die Regel: Man ziehe vom Cosinus derjenigen Seite welche dem gesuchten Winkel entgegen steht, das Product aus den Cosinussen derjenigen Seiten welche den gesuchten Winkel einschließen, ab, und dividire diese Differenz durch das Product der Sinusse, dieser den Winkel einschließenden Seiten, so ist der Quotient der Sinus eines Winkels dessen Ergänzung = b ist, und dieser Winkel wird spitzig seyn, wenn der Werth des Bruchs bejaht herauskommt, welches geschieht sobald der Zehler bejaht ist.

Es sey $\beta = 79^\circ\ 56'$; $\gamma = 135^\circ\ 25'$ und $\delta = 57^\circ\ 41'$ so ist cos. $\delta = 0,5345982$; cos. $\gamma = -0,7122301$ und cos. δ . cos. $\gamma = -0,38075698290564$ cos. $\beta = +0,1747939$ und hiervon das vorige Produkt abgezogen (115, 142 Ar.) bleibt $+ 0,$ 55555088290564 dieses endlich mit sin δ . sin γ = $+ 0,59321890$ .. dividirt, giebt $+ 0,9365$. dieser gehört zu $69^\circ\ 29'$ also b = $20^\circ\ 31$.

§. 17.

Anm. Weil die Rechnung nach dieser Regel etwas mühsam ist, so kann man nach folgender Formel verfahren, bey welcher die Logarithmen durchgängig angebracht werden können. Ihre Entwickelung findet man in Hrn. HR. Kästners sphärischer Trig. der ich auch im wesentlichen bey dem bisherigen Vortrage gefolgt bin, S. 545. Es ist neml.

1 —

$$1 - \text{cos. } b = \frac{2.\text{sin.}\frac{1}{2}(\beta + (\delta - \gamma)).\text{sin.}\frac{1}{2}(\beta - (\delta - \gamma))}{\text{sin. } \delta \text{ . sin. } \gamma}$$

also $\beta = + 79^\circ 56'$
$\delta - \gamma = - 77^\circ 44$

$\frac{1}{2}(\beta + (\delta - \gamma)) = + 1^\circ\ 6'$, log. sin. $= 8.2832434$

$\frac{1}{2}(\beta - (\delta - \gamma)) = + 78^\circ 50'$ log. sin. $= 9.9916991$
log. 2 $= 0,3010300$

log. des Zählers $= + 18.5759725$
Nun für den Nenner
log. sin. δ + log. sin. $\gamma = + 19.7732150$

log. (1 — cos. b) $= + 0.8027575 - 2$
(269 Ar.)

dieser Log. gehört beynahe zu 0, 06349.

also 1 — cos. b = 0, 06349. . . folglich cos. b = 1 — 0, 06349. . = 0,93650. . Dieser giebt b wieder 20° 31'. Der kleine Unterschied zwischen diesem Werth und der obigen Angabe rührt daher, daß die Angaben der Seiten in den Minuten nicht ganz genau sind.

Um auch für einen stumpfen Winkel ein Beyspiel zu haben, suche man c

Itzt ist also $\frac{1}{2}(\beta + \delta - \gamma) = 78^\circ\ 50'$ und
$\frac{1}{2}(\beta - \delta + \gamma) = 56^\circ\ 35'$

und der Log. des Zählers wird deshalb $= 20.2142531$
der Log. des Nenners $= 19.9201735$

log. (1 — cos. b) $= 0.2940796$

Dieser gehört zu 1, 9682 . . also cos. b = 1 — 1, 9682 . . = — 0, 9682 . . Bejaht gehörte dieser Sinus zu 75° 31' und hierzu wäre die Ergänzung 14° 29'. Da er aber verneint ist, so muß man für c

den

den stumpfen Nebenwinkel = 165° 31′, von die-
ser Ergänzung nehmen.

§. 18.

Anm. Aus der vorigen Formel läßt sich nach Kästn
Trig. 19. S. 7 Z. noch folgende herleiten, au
welcher man gleich den Sinus des verlangte
Winkels berechnen kann. Es ist nemlich 1 — co
b = 2 sin. ½ b², also erhält man sin. ½ b² =

$$\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(\beta+\delta-\gamma)\,.\,\sin.\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\delta)}{\sin.\delta\,.\,\sin.\gamma}$$

Weil nun bey Entwickelung dieser Formel, de
Halbmesser oder Sin. tot. = 1 angenommen is
der in den Tafeln aber, 10.000000 . . . (2c
Trig.) welcher r hieß, so muß man jeden in ih
vorkommenden Sinus, durch r dividiren, wen
für ihn der in den Tafeln stehende gebraucht wei
den soll, also hätte man

$$\frac{\sin.\tfrac{1}{2}b^2}{r^2} = \frac{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(\beta+\delta-\gamma)}{r}\;\frac{(\sin.\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\delta}{r}}{\frac{\sin.\delta}{r}\,.\,\frac{\sin.\gamma}{r}}$$

Hebt man nun die r auf der rechten Seite gege
einander auf, und setzt den auf der linken Sei
stehenden Nenner r² mit in den Zähler auf d
rechte Seite, so ist die Formel für die Tafel
nusse eingerichtet nemlich

$$\sin.\tfrac{1}{2}b^2 = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(\beta+\delta-\gamma)\,\sin.\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\delta)\,.\,r}{\sin.\delta\,.\,\sin.\gamma}$$

E

So wäre z. B. nach der letztern Bedeutung der Buchstaben

log. sin. $\frac{1}{2}(\beta + \delta - \gamma)$	=	9.9916991
log. sin. $\frac{1}{2}(\beta + \gamma - \delta)$	=	9.9215240
log. sin. r^2 (263. Nr.)	=	20.0000000
log. des Zählers	=	39.9132231
log. des Nenners	=	19.9201735
log. sin. $\frac{1}{2}$ b^2	=	19.9930496
halbirt	2)	
log. sin. $\frac{1}{2}$ b	=	9.9965248 gehört

zu 82° 45½′ also verdoppelt 165° 31′ = b.

§. 19.

Aufg. Aus den drey Seiten den Winkel b noch auf eine andere Art zu finden.

Aufl. und Beweis. Man suche erstlich das Perpendikel ba und alsdann den Winkel b nach I. Taf. 5 Falle.

Um das Perpendikel ba zu finden, gedenke man sich die gegebenen Seiten bc und cd als Maaße der Winkel acb und cba Fig. 135. so war in (33. Trig.)

$$ab + ac : ab - ac = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(c + b) : \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(c - b)$$

Es ist aber ab : ac = sin. c : sin. b (19 Trig.)

also auch I. sin. c + sin. b : sin. c − sin. b = tang $\frac{1}{2}$(c + b) : tang. $\frac{1}{2}$(c − b)

Es sey nun die Ergänzung des Winkels c = a, und die von b = d,

so ist II. $c + a = 90$ und $b + d = 90^\circ$

also III. $\sin. c = \cos. a$

und IV. $\sin. b = \cos. d$

auch $c = 90^\circ - a$ und $b = 90^\circ - d$

folglich $c + b = 180^\circ - (a + d)$

und $\frac{1}{2}(c + b) = 90^\circ - \frac{1}{2}(a + d)$

ferner $\frac{1}{2}(c + b) + \frac{1}{2}(a + d) = 90^\circ$. Es kann deshalb $\frac{1}{2}(c + b)$ als die Ergänzung von $\frac{1}{2}(a + d)$ angesehen werden, so daß

V. $\text{tang.} \frac{1}{2}(c + b) = \cot. \frac{1}{2}(a + d)$

aus II. ist $c + a = b + d$

folglich $c - b = d - a$

also VI. $\text{tang.} \frac{1}{2}(c - b) = \text{tang.} \frac{1}{2}(d - a)$

Man hat also $\sin. c = \cos. a$ aus III.

$\sin. b = \cos. d$ aus IV.

$\text{tang.} \frac{1}{2}(c + b) = \cot. \frac{1}{2}(a + d)$ aus V.

und $\text{tang.} \frac{1}{2}(c - b) = \text{tang.} \frac{1}{2}(d - a)$ aus VI.

Statt I. wird also wenn man substituirt VII. $\cos. a + \cos. d : \cos. a - \cos. d = \cot. \frac{1}{2}(d + a) : \text{tang.} \frac{1}{2}(d - a)$ d. i. die Summe der Cosinusse zweyer Bogen verhält sich zu ihrer Differenz, wie die

ie Cotangente der halben Summe der Bogen zur Tangente der halben Differenz derselben.

Aus (15 III.) hat man nun für Fig. 155.

os. bc : cos. cd = cos. ab : cos. ad und erhält aus (231. IV. I. II. Ar.) cos. bc + cos. cd : cos. bc − cos. cd = cos. ab + cos. ad : cos. ab − cos. ad; ber cos. bc + cos. cd : cos. bc − cos. cd = cot. $\frac{1}{2}$ (cd + bc) : tang. $\frac{1}{2}$ (cd − bc)

nd cos. ab + cos. ad : cos. ab − cos. ad = cot. $\frac{1}{2}$ (ad + ab) : tang. $\frac{1}{2}$ (ad − ab)

lglich cot. $\frac{1}{2}$ (cd + bc) : tang. $\frac{1}{2}$ (cd − bc) = cot. $\frac{1}{2}$ (ad + ab) : tang. $\frac{1}{2}$ (ad − ab)

Ist nun wieder

cd = 79° 56′
bc = 57° 41′ und ad + ab = bd = 135° 25′

ist $\frac{1}{2}$ (cd + bc) = 68° 48 $\frac{1}{2}$′, halb = 67° 42 $\frac{1}{2}$′
nd $\frac{1}{2}$ (cd − bc) = 11° 7 $\frac{1}{2}$′

nd log. tang. 11° 7$\frac{1}{2}$′ = 9. 2936837
log. cot. 67° 42$\frac{1}{2}$′ = 9. 6127414
18. 9064251
log. cot. 68° 48$\frac{1}{2}$′ = 9. 5885037
g. tang. $\frac{1}{2}$ (ad − ab) = 9. 3179214 gehört 11° 45′ also ist ba = 67° 42′$\frac{1}{2}$ − 11° 45′ = 55° $\frac{1}{2}$′ (32. Trig.)

Nun nach I. Taf. 5. Fall

$$\log.\ \cot.\ bc = 9.8011161$$
$$\log.\ \tan g.\ ba = 10.1703314$$
$$\log.\ \cos.\ b = 9.9714475$$ giebt $b = 20^{\circ}\ 33'$.

§. 20.

Aufg. Aus den drey Winkeln eine Seite bc Fig. 155. zu finden.

Aufl. und Beweis. Man lasse aus c wieder das Perpendikel ca fallen, und suche den Winkel bca, so hat man bc aus I. Taf. 30 Fall. Man hat nemlich aus (15. IV.)

$$\cos.\ d : \cos.\ b = \sin.\ acd : \sin.\ bca$$

Nach (19) wird aus der erstern Verhältniß

$$\cos.\ d + \cos.\ b : \cos.\ d - \cos.\ b = \cot.\ \tfrac{1}{2}(b + d) : \tan g.\ \tfrac{1}{2}(b - d)$$ (19. VII.

und aus der letztern

$$\sin.\ acd + \sin.\ bca : \sin.\ acd - \sin.\ bca = \tan g.\ \tfrac{1}{2}(acd + bca) : \tan g.\ \tfrac{1}{2}(bca - acd)$$ (19. I.

folglich $\cot.\ \tfrac{1}{2}(b + d) : \tan g.\ \tfrac{1}{2}(b - d) = \tan g.\ \tfrac{1}{2}(acd + bca) : \tan g.\ \tfrac{1}{2}(bca - acd$

F

In der vorigen Bedeutung der Buchstaben ist

log. tang. $\frac{1}{2}$ (b — d) = 8. 4180679
log. tang. $\frac{1}{2}$ b c d = 10. 8974808

19. 3155487
log. cot. $\frac{1}{2}$ (b + d) = 10. 4642607

log. tang. $\frac{1}{2}$ (b c a — a c d) = 8. 8512880 gehört zu 4° 4′ also b c a = 78° 43′ (32. Trig.)

Und nun I. Tafel 30. Fall.

log. cot. b = 10. 4284189
log. cot. b c a = 9. 2999804

log. cos. b c = 9. 7283993 giebt b c, 57° 40′

§. 21.

Anm. Man kann sich auch einer ähnlichen Formel wie in (18) bedienen. Es ist nemlich cos. $\frac{1}{2}$ b c², oder in der dortigen Bedeutung der Buchstaben.

$$\cos. \tfrac{1}{2}\,\delta^2 = \frac{\cos. \tfrac{1}{2}(d + b - c)\cos. \tfrac{1}{2}(d + c - b)\, r^2}{\sin.\, b\,.\, \sin.\, c\,.}$$

Z. B. log. cos. $\frac{1}{2}$ (d + b — c) = 9. 6444226
log. cos. $\frac{1}{2}$ (d + c — b) = 9. 1805512
log. r² = 20. . . . .

38. 8249738
log. sin. b + log. sin. c = 18. 9399513

log. cos. $\frac{1}{2}$ δ² = 19. 8850225
halbirt
log. cos. $\frac{1}{2}$ δ = 9. 9425112

giebt b c 57° 40′ . .

Der

Der erste Factor im Zähler kommt hier verneint, dies macht aber keinen Unterschied, weil ein bejahter und verneinter Bogen einerley Cosinus haben (4. Trig.). Uebrigens ist zu bemerken, daß wenn man auf die Seiten eines sphärischen Dreyecks Quadranten senkrecht setzt, in ihren Endpunkten die Pole dieser Seiten liegen (345. Ge.). Die Distanz dieser Pole aber ist dem Winkel gleich welchen die Seiten zu denen die Pole gehören, mit einander machen (346. Ge.). Vereinigt man also diese Pole durch Bögen, so erhält man ein Dreyeck in welchem die Seiten den Winkeln des vorigen gleich sind.

§. 22.

Anm. Bey den schiefwinklichten Dreyecken lassen sich in Absicht dessen was spitzig und stumpf in ihnen ist, ähnliche Betrachtungen, wie bey den rechtwinklichten (10) anstellen; allein der zweydeutigen Fälle giebt es hier noch viel mehrere als in (11). Man sehe darüber Hrn. HR. Kästn. sphär. Trig. 2. Satz 4. u. folg.

Ver-

Verbesserungen.

Seite	Zeile	
6	14	lese man statt „die„ dieselbe
16	6	lese man statt „Dividends„ Divisors
37	19	lese man statt „148„ 184
40	2	von unten, statt „$a^2 +$„ $a^3 +$
46	4	von oben, statt „2„ 1.
01	3	statt „$ae =$„ $ae^n =$
26	3	statt „25„ 32
—	8	v. u. statt „29„ 33
32	2	v. o. st. „am„ cm
—	3	st. „(3. Ar.)„ (53)
64	5	st. „noch„ nach
bendaselbst am Ende der Zeile noch die Worte: ab die		
71	2	v. u. st. „(241. II.)„ (141. II.)
85	14	v. o. am Ende der Zeile noch das Wort: bis
—	10	v. u. st. „cba„ eba
87	5	v. u. $ab : ac = \alpha\beta : \alpha\gamma$

Seite

Seite	Zeile	
298	11	von unten statt „$\Box'$„ l $\Box''$
312	2	v. u. statt „d„ d^2
314	14	von oben st. „XI„ IX
315	4	v. o. st. „dividirt„ multiplicirt
321	2	v. u. st. „= acb„ = ack
324	10	v. u. st. „agd„ $c\gamma d$
325	11	v. o. st. „agd„ $c\gamma d$. Und unmittelbar nach diesen Buchstaben schalte man die Worte ein: Desgleichen die congruirenden Dreyecke $a\gamma d$ und acd
403	6	v. o. st. „c„ c^2.

I. Tafel